V. Ditkine, A. Proudnikov

TRANSFORMATIONS INTÉGRALES ET CALCUL OPÉRATIONNEL

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-iut)\,\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(itu)\,\mathrm{d}u$$

Éditions Mir Moscou

В. А. ДИТКИН, А. П. ПРУДНИКОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. DITKINE et A. PROUDNIKOV

TRANSFORMATIONS INTÉGRALES ET CALCUL OPÉRATIONNEL

EDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par DJILALI EMBAREK

На французском языке

TABLE DES MATIÈRES

PRINCIPES DE LA THÉORIE

TABLES DES FORMULES

AVANT-PROPOS

Les méthodes qui se rattachent aux transformations intégrales trouvent un vaste champ d'applications en analyse mathématique ces derniers temps. Elles ont été utilisées avec succès dans la résolution d'équations différentielles et intégrales, dans l'étude des fonctions spéciales et le calcul d'intégrales. L'avantage de ces méthodes est dans le fait qu'elles permettent de construire les tables des transformations directes et inverses des diverses fonctions que l'on rencontre dans les applications.

Dans cet ouvrage on considère les transformations intégrales les plus répandues. Une première partie de cinq chapitres est consacrée aux principes de la théorie. Le premier chapitre expose des éléments de théorie des transformations de Fourier et certaines de leurs applications. Le second chapitre qui est le plus important et le plus long traite de la transformation de Laplace, ainsi que de celle de Mellin. L'objet du troisième chapitre est la transformation intégrale de Bessel, ou plus exactement les transformations intégrales ayant une fonction de Bessel pour noyau : les transformations de Hankel, Meijer, Kontorovitch-Lébédev. Dans le chapitre quatre les auteurs passent brièvement en revue d'autres transformations intégrales. Le cinquième est réservé aux principes de la théorie du calcul opérationnel.

Le calcul symbolique ou opérationnel, on le sait, fut systématiquement élaboré dans la moitié du siècle passé. A la fin du XIXe, Heaviside l'applique avec bonheur à la résolution de certains problèmes se rattachant à la théorie des oscillations électromagnétiques. Le large développement du calcul symbolique est à l'origine de nombreux travaux dont l'objet était précisément de le justifier. Le point de vue opérationnel de Heaviside fut évincé par les travaux de Carson, Doetch, Van der Pol, etc., qui se servirent de la transformation de Laplace et de l'intégrale de Mellin.

Cependant une telle situation ne pouvait pas durer trop longtemps, car l'essor de l'analyse fonctionnelle et, notamment, la théorie des opérateurs linéaires contribuèrent au développement des

méthodes opérationnelles en analyse mathématique. Dans les travaux [44], [195], on trouvera un exposé opérationnel du calcul symbolique basé sur la transformation de Laplace.

Le retour au point de vue opérationnel initial est l'œuvre de Mikusinski [165]. Ce dernier donne en effet une justification opérationnelle rigoureuse du calcul symbolique sans faire usage de la transformation de Laplace. A ces fins il introduit diverses notations pour la fonction et sa valeur en un point. Il désigne la *fonction* par $\{f(t)\}$ et *sa valeur en un point t* par $f(t)$. Exemple: 2 est un nombre, $\{2\}$ est une fonction prenant la valeur constante 2.

Au chapitre V, contrairement à Mikusinski, on définit la convolution de sorte à ne pas faire de distinction entre une constante et la fonction d'une constante. Comme dans nombre de cas l'usage de l'intégrale de Laplace simplifie singulièrement les divers calculs et transformations relatifs à l'établissement des formules opérationnelles, ici on dégage le lien existant entre le calcul opérationnel construit et la transformation de Laplace. Dans ce chapitre, on étudie également la transformation généralisée de Laplace et on énonce ses principales propriétés. En fin de chapitre on examine succinctement le calcul symbolique de l'opérateur de Bessel et l'on établit son lien avec la transformation de Meijer.

La deuxième partie du livre est occupée par les tables des formules des transformations intégrales. En résolvant des problèmes concrets, on établit des formules des transformations intégrales qui peuvent être généralisées à d'autres problèmes. Aussi les tables des formules des transformations intégrales possèdent-elles un vaste terrain d'applications qui englobe les domaines les plus variés des connaissances: mathématiques, physique, mécanique, électrotechnique, etc. Les tables des formules sont précédées des notations des fonctions spéciales et de certaines constantes (chapitre VI). Dans les autres chapitres on étudie les transformations de Fourier, Laplace-Carson, Mellin, Hankel, Meijer, Kontorovitch-Lébédev, Mehler-Fock, Hilbert, etc. Pour dresser ces tables on s'est servi essentiellement de travaux portant sur le même sujet, parmi lesquels il importe de faire une mention spéciale à: Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G., Tables of integral Transforms, 1954; Oberhettinger F., Tabellen zur Fourier-Transformation, 1957.

Il n'est pas exclu que des erreurs se soient glissées au cours de la manipulation d'une telle quantité de formules, aussi les auteurs seraient-ils reconnaissants aux lecteurs de bien vouloir leur communiquer les incorrections relevées.

V. Ditkine, A. Proudnikov

PRINCIPES DE LA THÉORIE

CHAPITRE PREMIER

TRANSFORMATION DE FOURIER

§ 1. Prologue à la théorie des séries de Fourier

Toute fonction $f(t)$ peut être représentée sous des hypothèses assez générales par une série infinie de la forme

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt), \tag{1.1}$$

où

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1.2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.3}$$

Cette série s'appelle *série trigonométrique de Fourier*, les nombres a_n et b_n *coefficients de Fourier* de la fonction $f(t)$. Les membres de la série (1.1) étant tous 2π-périodiques, on peut limiter l'étude de cette série à tout intervalle de longueur 2π. Dans le cas d'un intervalle de longueur arbitraire $2l$, la série de Fourier

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right), \tag{1.4}$$

où

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.5}$$

et

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} \, dt \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.6}$$

est une fonction $2l$-périodique.

Compte tenu de l'*identité d'Euler*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \tag{1.7}$$

on peut mettre la série (1.1) sous la forme complexe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \tag{1.8}$$

où

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1.9}$$

Parfois, au lieu de l'intervalle $]-\pi, \pi[$ ou $]0, 2\pi[$ il est plus commode de considérer un intervalle de longueur 1, par exemple, $]0, 1[$. Les coefficients de Fourier s'écrivent alors

$$c_n = \int_{0}^{1} f(t) e^{-2\pi int} \, dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1.10}$$

Si $f(t)$ est une *fonction paire* i.e. $f(-t) = f(t)$ et si elle est intégrable sur l'intervalle $]-l, l[$, alors

$$\int_{-l}^{l} f(t) \, dt = 2 \int_{0}^{l} f(t) \, dt.$$

De façon analogue, si $f(t)$ est une *fonction impaire*, i.e. $f(-t) = -f(t)$, alors

$$\int_{-l}^{l} f(t) \, dt = 0.$$

Si $f(t)$ est une fonction paire sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$, la fonction $f(t) \cos nt$ est paire et la fonction $f(t) \sin nt$ impaire quel que soit n. Si l'on définit les coefficients de la série de Fourier d'une fonction paire $f(t)$ d'après les formules (1.2) et (1.3), on obtient

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \tag{1.11}$$

et $b_n = 0$. La série de Fourier de la fonction $f(t)$ ne contient que des cosinus; les coefficients de cette série sont donnés par la formule (1.11).

Si $f(t)$ est une fonction impaire, les fonctions $f(t) \cos nt$ et $f(t) \sin nt$ seront respectivement impaire et paire. La série de Fourier d'une fonction impaire $f(t)$ ne contient que des sinus et ses coefficients sont définis par

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt. \tag{1.12}$$

Donc, toute fonction intégrable entre 0 et π peut formellement être représentée sur cet intervalle par une série de Fourier de sinus ou de cosinus, sans aucune hypothèse sur sa parité, son imparité, sa périodicité et voire même sur sa définition en dehors de cet intervalle.

Voici un théorème fondamental de la théorie des séries de Fourier.

Théorème 1 (Riemann-Lebesgue). *Si une fonction $f(t)$ est intégrable sur un intervalle $]a, b[$, alors*

$$\int_a^b f(t) \cos \lambda t \, dt \to 0, \quad \int_a^b f(t) \sin \lambda t \, dt \to 0$$

lorsque $\lambda \to \infty$.

Voir démonstration dans [106], [270]. Le théorème de Riemann-Lebesgue possèdent des corollaires importants.

Corollaire 1. *Les coefficients de Fourier de toute fonction intégrable tendent vers zéro.*

Corollaire 2. *Le comportement d'une série de Fourier en un point t dépend uniquement du comportement de la fonction en un voisinage immédiat de ce point* (*principe de localisation*).

Formulons le *critère de convergence* le plus usité *d'une série de Fourier*. Si f est une fonction à variation bornée, sa série de Fourier *converge* en tout point t vers la valeur $\frac{1}{2}\{f(t+0) - f(t-0)\}$. Si f est de plus continue sur un intervalle $]a, b[$, la série de Fourier est uniformément convergente sur cet intervalle (cf. [270]).

§ 2. Formule intégrale de Fourier

Supposons qu'une fonction $f(t)$ $2l$-périodique est représentée par la série (1.4). En portant dans (1.4) les expressions (1.5) de a_n et (1.6) de b_n, on obtient

$$f(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(\tau) \, d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(\tau) \cos \frac{n\pi}{l} (\tau - t) \, d\tau. \tag{1.13}$$

Si l'on pose $\frac{n\pi}{l} = \lambda$, $\frac{\pi}{l} = \Delta\lambda$ et que l'on passe formellement à la limite lorsque $l \to \infty$, la somme se transforme en une intégrale et

nous obtenons la formule intégrale de Fourier

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\lambda(\tau-t)\,d\tau. \qquad (1.14)$$

Cette formule définit une fonction sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ de la même façon que la série de Fourier définit une fonction de période finie. La formule (1.14) se ramène à la forme suivante:

$$f(t)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} e^{it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau}f(\tau)\,d\tau\,d\lambda \qquad (1.15)$$

ou

$$f(t)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin l(t-\tau)}{t-\tau}f(\tau)\,d\tau. \qquad (1.16)$$

L'intégrale du second membre de la formule (1.14) s'appelle *intégrale double de Fourier*, la formule (1.15) *forme complexe de l'intégrale de Fourier* et la formule (1.16) *représentation de la fonction $f(t)$ par l'intégrale simple de Fourier*. Les conditions classiques de validité des formules précédentes s'établissent à l'aide du théorème suivante.

Théorème 2 [32]. *Supposons qu'une fonction $f(t)$ est intégrable-Lebesgue sur l'intervalle* $]-\infty, +\infty[$ *) *et qu'elle est à variation bornée sur tout intervalle fini. Les formules* (1.14), (1.15), (1.16) *sont valables si l'on remplace leurs premiers membres par* $\frac{1}{2}\{f(t+0)+$ $+f(t-0)\}$ *aux points de discontinuité de $f(t)$. Les formules* (1.14), (1.15), (1.16) *peuvent également s'écrire sous la forme suivante*:

$$f(t)=\int_{0}^{\infty}[a(u)\cos tu+b(u)\sin tu]\,du, \qquad (1.17)$$

où

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt, \quad b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt.$$

Si $f(t)$ est une fonction paire, la formule (1.17) s'écrit alors

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos tu\,du\int_{0}^{\infty} f(\tau)\cos u\tau\,d\tau. \qquad (1.18)$$

*) Ce qu'on note brièvement: $f(t)\in L]-\infty, +\infty[$.

Le développement (1.18) s'appelle *développement de Fourier de $f(t)$ en série de cosinus.*

De façon analogue, si $f(t)$ est une fonction impaire, on obtient le *développement de Fourier de $f(t)$ en série de sinus*

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin tu \, du \int_0^{\infty} f(\tau) \sin u\tau \, d\tau. \tag{1.19}$$

§ 3. Propriétés fondamentales des transformées de Fourier

1. Les formules considérées ici conduisent à des relations réciproques ou duales entre couples de fonctions.

Si l'on pose

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} \, dt, \tag{1.20}$$

la formule (1.15) donne

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{itu} \, du, \tag{1.21}$$

où l'intégrale du second membre est prise dans sa *valeur principale*, i.e. comme la limite

$$\lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} F(u) e^{itu} \, du.$$

La fonction $F(u)$ porte le nom de *transformée de Fourier* de $f(t)$.

Si la fonction $f(t)$ est intégrable sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, la fonction $F(u)$ existe pour tous les t. Si les fonctions $F(u)$ et $f(t)$ sont les transformées de Fourier l'une de l'autre, on les appelle *couple de transformées de Fourier.* En posant

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt, \tag{1.22}$$

on déduit de (1.18)

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(u) \cos tu \, du. \tag{1.23}$$

Les fonctions ainsi liées entre elles s'appellent *couple de cosinus-transformées de Fourier.* De façon analogue, de la formule (1.19)

on obtient le *couple de sinus-transformées de Fourier*:

$$F_s(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt, \tag{1.24}$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(u)\sin tu\,du. \tag{1.25}$$

Si $f(t)$ est paire,

$$F(u)=F_c(u);$$

si $f(t)$ est impaire,

$$F(u)=iF_s(u).$$

2. Supposons que les fonctions $F(u)$ et $G(u)$ sont les transformées de Fourier respectivement des fonctions $f(t)$ et $g(t)$, définies par les formules (1.20), (1.21).

On a formellement

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)G(u)e^{-itu}\,du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{-itu}\,du\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)e^{iu\tau}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)\,d\tau\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{-iu(t-\tau)}\,du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau, \tag{1.26}$$

i.e. les fonctions

$$F(u)G(u) \quad \text{et} \quad h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau$$

forment un couple de transformées de Fourier. La fonction $h(t)$ est appelée *produit de convolution* (ou de composition) *des fonctions* $f(t)$ *et* $g(t)$.

Théorème 3. *Supposons que* $f(t)$ *est la transformée de Fourier de la fonction* $F(t)\in L\,]-\infty, +\infty[$ *et que la fonction* $g(t)\in L\,]-\infty, +\infty[$ *(de sorte que sa transformée de Fourier* $G(t)$ *est une fonction bornée). Ceci étant le produit* $\sqrt{2\pi}\,F(t)\,G(t)$ *appartient à* $L\,]-\infty, +\infty[$ *et sa transformée de Fourier est*

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau.$$

La validité de ce théorème est entraînée par celle de l'inversion de l'ordre d'intégration dans (1.26), inversion qui découle de la convergence absolue.

Théorème 4. *Supposons que $f(t)$ et $g(t) \in L\,]-\infty, +\infty[$. Alors $h(t) \in L\,]-\infty, +\infty[$ et sa transformée de Fourier est la fonction $\sqrt{2\pi}\, F(t)\, G(t)$.*

Pour les propriétés sus-indiquées du produit de la convolution moyennant d'autres hypothèses, voir [238], [21]. Par analogie avec (1.26), dans le cas des cosinus-transformées, on aura

$$\int_0^\infty F_c(u)\, G_c(u) \cos tu\, du =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(u) \cos tu\, du \int_0^\infty g(\tau) \cos \tau u\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(\tau)\, d\tau \int_0^\infty F_c(u) [\cos |t-\tau| u + \cos (t+\tau) u]\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty g(\tau) [f(|t-\tau|) + f(t+\tau)]\, d\tau \qquad (1.27)$$

et dans le cas des sinus-transformées

$$\int_0^\infty F_s(u)\, G_s(u) \sin tu\, du =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(u) \sin tu\, du \int_0^\infty g(\tau) \sin u\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(\tau)\, d\tau \int_0^\infty F_s(u) [\cos |t-\tau| u - \cos (t+\tau) u]\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty g(\tau) [f(|t-\tau|) - f(t+\tau)]\, d\tau. \qquad (1.28)$$

On peut effectuer n fois le produit de convolution. On obtiendra alors

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(\tau)\, F_1(\tau) \ldots F_n(\tau)\, e^{-it\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^\infty f_n(\tau_n)\, d\tau_n \int_{-\infty}^\infty f_{n-1}(\tau_{n-1})\, d\tau_{n-1} \ldots$$

$$\ldots \int_{-\infty}^\infty f_1(\tau_1)\, f(t-\tau_1-\ldots-\tau_n)\, d\tau_1. \qquad (1.29)$$

3. *Formules de Parseval*. Soient $f(t) \in L\ ]-\infty, +\infty[$, $g(t)$ une fonction intégrable sur tout intervalle fini et

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} g(\tau) e^{it\tau} d\tau$$

pour tous les t et, de plus, $G(t)$ est partout finie et appartient à $L\ ]-\infty, +\infty[$. On a alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) G(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{it\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{it\tau} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(-\tau) d\tau. \quad (1.30)$$

Si en particulier $f = g$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (1.31)$$

Les formules (1.30) et (1.31) contiennent de toute évidence les formules des cosinus et sinus-transformées de Fourier. En effet, si les fonctions sont paires, on a

$$\int_{0}^{\infty} F_c(t) G_c(t) dt = \int_{0}^{\infty} f(t) g(t) dt \quad (1.32)$$

et

$$\int_{0}^{\infty} [F_c(t)]^2 dt = \int_{0}^{\infty} [f(t)]^2 dt; \quad (1.33)$$

si elles sont impaires

$$\int_{0}^{\infty} F_s(t) G_s(t) dt = \int_{0}^{\infty} f(t) g(t) dt \quad (1.34)$$

et

$$\int_{0}^{\infty} [F_s(t)]^2 dt = \int_{0}^{\infty} [f(t)]^2 dt. \quad (1.35)$$

Ces formules sont identiques à la formule

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (1.36)$$

de la théorie des séries de Fourier et s'appellent *formules de Parseval*.

4. *Transformées de Fourier de fonctions analytiques.* Soit $f(z)$ une fonction analytique, régulière dans la bande $(-a < y < b)$ où $a > 0$, $b > 0$. Supposons que dans chaque bande intérieure à $(-a < y < b)$

$$f(z) = \begin{cases} O[e^{+(\mu-\varepsilon)x}] & (x \to -\infty), \\ O[e^{-(\lambda-\varepsilon)x}] & (x \to +\infty), \end{cases} \tag{1.37}$$

où $\varepsilon > 0$; λ et μ étant des nombres positifs arbitraires. La fonction

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) e^{i\zeta w} d\zeta \tag{1.38}$$

vérifie les mêmes conditions par changement de a, b, λ, μ en λ, μ, a, b respectivement, et

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{-izw} dw \tag{1.39}$$

pour tous les z de la bande $(-a < y < b)$.

§ 4. Transformées multiples de Fourier

On a par définition

$$F(\omega, \lambda) = \mathcal{F}[f(x, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega x + \lambda y)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{1.40}$$

La fonction $F(\omega, \lambda)$ porte le nom de *transformée de Fourier de la fonction de deux variables* $f(x, y)$. Si les fonctions $f(x, y)$ et $F(\omega, \lambda)$ appartiennent à L, on a la formule d'inversion suivante

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega, \lambda)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega x + \lambda y)} F(\omega, \lambda)\, d\omega\, d\lambda. \tag{1.41}$$

Si $f(x, y)$ et $g(x, y)$ appartiennent à L, alors existe l'intégrale

$$f(x, y) \underset{-\infty}{\overset{\infty}{*}} \underset{-\infty}{\overset{\infty}{*}} g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, g(x - \zeta, y - \eta)\, d\zeta\, d\eta, \tag{1.42}$$

et, de plus,

$$\mathcal{F}[f(x, y) \underset{-\infty}{\overset{\infty}{*}} \underset{-\infty}{\overset{\infty}{*}} g(x, y)] = F(\omega, \lambda)\, G(\omega, \lambda). \tag{1.43}$$

La généralisation à un plus grand nombre de variables est immédiate. On trouvera un exposé complet de la théorie des transformées multiples de Fourier dans l'ouvrage de Bochner and Chandrasekaran [21]. Voir par ailleurs [42].

§ 5. Quelques applications de la transformation de Fourier

La transformation de Fourier joue un rôle très important dans la résolution d'un grand nombre de problèmes de physique mathématique, tels les problèmes aux limites posés pour l'équation de Laplace, de Helmholtz et de Fourier dans un domaine en forme d'une bande infinie, de demi-bande, de cylindre infinie, de demi-cylindre, etc.

En particulier, la transformation de Fourier est intéressante dans les problèmes qui se ramènent à une intégration d'équations de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(u) = f(x, y),$$

où $L(u)$ est un opérateur différentiel linéaire ne contenant pas la variable x et $f(x, y)$ une fonction donnée. Examinons quelques problèmes de physique mathématique solubles par la transformation de Fourier.

1. Considérons un *problème d'hydrodynamique* [35], [132] se ramenant à la résolution de l'*équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (y < 0) \tag{1.44}$$

sous les conditions initiales et aux limites suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ pour } y = 0, \tag{1.45}$$

$$u = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } t = 0. \tag{1.46}$$

Soit

$$U(\omega, y, t) = \mathcal{F}[u(x, y, t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t)\, e^{-i\omega x}\, dx.$$

Si $u \to 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x} \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$, on obtient

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -\omega^2 U.$$

Et l'équation (1.44) est remplacée par

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - \omega^2 U = 0.$$

Sa solution qui tend vers 0 lorsque $y \to -\infty$ est de la forme

$$U = c(\omega, t)\, e^{|\omega| y},$$

où $c(\omega, t) = U|_{y=0}$. Compte tenu de cette dernière relation, en appliquant la transformation de Fourier à l'équation (1.45), on obtient

$$c(\omega, t) = A(\omega)\, e^{i\sqrt{g|\omega|}t} + B(\omega)\, e^{-i\sqrt{g|\omega|}t}.$$

De (1.46) il vient

$$A(\omega) = B(\omega) = \frac{1}{2}\Phi(\omega),$$

où $\Phi(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction $\varphi(x)$. Donc,

$$U = \Phi(\omega) \cos\left(\sqrt{g|\omega|}\, t\right) e^{|\omega| y}$$

et

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \cos \sqrt{g|\omega|}\, t \cdot e^{|\omega| y + i\omega x}\, d\omega.$$

2. Soit à déterminer la solution $u(x, t)$ de l'*équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.47}$$

qui vérifie la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty). \tag{1.48}$$

Soit

$$U(\omega, t) = \mathscr{F}[u(x, t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{i\omega x}\, dx. \tag{1.49}$$

Moyennant les mêmes conditions que dans 1, il vient

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -\omega^2 U(\omega, t).$$

Donc (1.47) et (1.48) se ramènent à l'équation

$$\frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t} = -\omega^2 U(\omega, t),$$

d'où

$$U(\omega, t) = A(\omega)\, e^{-\omega^2 t}.$$

En faisant $t = 0$, on obtient

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix\omega}\, dx = F(\omega).$$

Donc,

$$U(\omega, t) = F(\omega)\, e^{-\omega^2 t}$$

et

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{-\omega^2 t-ix\omega}\,d\omega.$$

Par ailleurs

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t-ix\omega}\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{i\omega\xi}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t-i\omega(x-\xi)}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi.$$

3. Soit à déterminer une solution $u(x,\ t)$ de l'équation (1.47), telle que

$$u(x,\ 0)=0\quad (x>0),\quad u(0,\ t)=f(t)\quad (t>0).$$

Posons

$$U_s(\omega,\ t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u(x,\ t)\sin\omega x\,dx.$$

Alors (1.47) se ramène à la forme

$$\frac{\partial U_s(\omega,\ t)}{\partial t}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(t)-\omega^2 U_s(\omega,\ t).$$

D'où

$$U_s(\omega,\ t)=A(\omega)\,e^{-\omega^2 t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega e^{-\omega^2 t}\int_0^{t} e^{-\omega^2\tau} f(\tau)\,d\tau.$$

Comme $U_s(\omega,\ t)=0$ lorsque $t=0$, il vient $A(\omega)=0$. Donc,

$$u(x,\ t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\xi e^{-\xi^2 t}\sin\xi x\,d\xi\int_0^{t} e^{\xi^2\tau} f(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{t} f(\tau)\,d\tau\int_0^{\infty}\xi e^{\xi^2(\tau-t)}\sin\xi x\,d\xi=$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{t} f(\tau)\,(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\,d\tau=\int_0^{t}\Psi(x,\ t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau,$$

où

$$\Psi(x, t) = -\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}},$$

$$\chi(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}.$$

Pour justifier les solutions formelles précédentes, il suffit de supposer, par exemple, que toutes les fonctions envisagées appartiennent à L $]-\infty, +\infty[$.

4. Dans certains cas la transformation de Fourier permet de résoudre des équations intégrales de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\, \varphi(y)\, dy, \tag{1.50}$$

où $f(x)$ et $k(x)$ sont des fonctions données, $\varphi(x)$ la fonction cherchée.

L'application de la transformation de Fourier donne

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\, \varphi(y)\, dy \right\} e^{ixu}\, dx =$$

$$= F(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\, e^{ixu}\, dx =$$

$$= F(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)\, e^{i(y+\eta)u}\, d\eta =$$

$$= F(u) + \sqrt{2\pi}\, \Phi(u)\, K(u).$$

D'où

$$\Phi(u) = \frac{F(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\, K(u)}$$

et

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\, K(u)} e^{-ixu}\, du.$$

D'un autre côté

$$\varphi(x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{F(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\, K(u)} - F(u) \right\} e^{-ixu}\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \frac{K(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\, K(u)} e^{-ixu}\, du.$$

En introduisant la notation

$$R(u) = \frac{K(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\, K(u)},$$

il vient

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} r(x-\xi)\, f(\xi)\, d\xi.$$

Si dans (1.50) les fonctions $\varphi(x)$, $f(x)$ et $k(x)$ sont nulles pour les valeurs négatives de l'argument, on arrive alors à l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{0}^{x} k(x-\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \qquad (x > 0).$$

Dans ce cas la solution est de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{0}^{x} f(\xi)\, r(x-\xi)\, d\xi,$$

où $r(x) = 0$ lorsque $x < 0$ est une fonction dont la transformée de Fourier est

$$R(u) = \frac{K(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\, K(u)}$$

On remarquera que ceci entraîne

$$r(x) = k(x) + \int_{0}^{x} k(\xi)\, r(x-\xi)\, d\xi.$$

Une autre équation intégrale soluble par la même méthode est

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\, \varphi(y)\, dy. \qquad (1.51)$$

Par analogie à ce qui précède, on aura formellement

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu}\, du \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi)\, e^{ixu}\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)\, e^{i(\xi+\eta)u}\, d\eta = \sqrt{2\pi}\, \Phi(u)\, K(u),$$

d'où

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u)}{K(u)} e^{-ixu}\, du.$$

On remarquera que pour que cette méthode soit rigoureuse, il faut que toutes les fonctions figurant dans l'équation vérifient des conditions spéciales. On a, par exemple, le théorème :

Supposons que $f(x) \in L^2\ ]-\infty, +\infty[$, $k(x) \in L\ ]-\infty, +\infty[$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (1.51) *possède une solution* $\varphi(x)$ *appartenant à* $L^2\ ]-\infty, +\infty[$ *est que* $\frac{F(u)}{K(u)} \in$ $\in L^2\ ]-\infty, +\infty[$.

Voyons encore une équation intégrale de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x+y)\, \varphi(y)\, dy.$$

Comme précédemment on a

$$\Phi(u) = F(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} k(x+y)\, \varphi(y)\, dy =$$

$$= F(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} k(x+y)\, e^{ixu}\, dx =$$

$$= F(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)\, e^{i(\eta-y)u}\, d\eta =$$

$$= F(u) + \sqrt{2\pi}\, \Phi(-u)\, K(u).$$

En inversant le signe de u, on obtient

$$\Phi(-u) = F(-u) + \sqrt{2\pi}\, \Phi(u)\, K(-u).$$

Les dernières égalités entraînent

$$\Phi(u) = \frac{F(u) + \sqrt{2\pi}\, F(-u)\, K(u)}{1 - 2\pi K(u)\, K(-u)}.$$

Donc,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u) + \sqrt{2\pi}\, F(-u)\, K(u)}{1 - 2\pi K(u)\, K(-u)}\, e^{-ixu}\, du.$$

Dans nombre de problèmes de physique mathématique on a à considérer des équations intégrales de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{0}^{\infty} k(|x-y|)\, \varphi(y)\, dy$$

à noyau symétrique, dépendant du module de la différence des deux arguments. L'étude de cette équation se fait également à l'aide des intégrales de Fourier (cf. [74]).

5. *Calcul des intégrales.* Pour calculer des intégrales on se sert des formules de Parseval (1.30) à (1.35). Pour le calcul de certaines intégrales contenant des fonctions trigonométriques et exponentielles, on peut se servir des formules d'inversion correspondantes. Supposons que

$$S = \int_0^\infty e^{-ax} x^\nu J_\nu(x)\, dx.$$

En vertu de (1.24), on a

$$f(x) = e^{-ax}, \quad F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u}{u^2+a^2},$$

$$g(x) = x^\nu J_\nu(x), \quad G_s(u) = \begin{cases} 0 \text{ pour } 0 < u < 1, \\ \dfrac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} (u^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}} \text{ pour } u > 1 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}\right).$$

En appliquant la formule de Parseval (1.34), on obtient

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^\nu J_\nu(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_1^\infty \frac{x}{x^2+a^2} \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(x^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\, dx =$$

$$= \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \int_0^1 \frac{u^{\nu-\frac{1}{2}}}{(a^2u+1)(1-u)^{\nu+\frac{1}{2}}}\, du = \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(a^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}}}.$$

Le prolongement étant analytique, ce résultat est valable pour $\operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}$ [238].

Bibliographie du chapitre premier

[106], [270], [115], [132], [142], [219], [222], [237], [238], [239], [240], [20], [21], [31], [32], [97], [178], [256].

CHAPITRE II

TRANSFORMATION DE LAPLACE

§ 1. L'intégrale de Laplace et ses propriétés fondamentales

Soit $f(t)$ une fonction de variable réelle $t \in [0, \infty[$, intégrable-Lebesgue sur tout intervalle $]0, A[$. Soit un nombre complexe $p = \sigma + i\tau$. L'expression

$$f^*(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \mathcal{L}[f(t)] \qquad (2.1)$$

s'appelle l'*intégrale de Laplace*, et la fonction $f^*(p)$ la *transformée* de Laplace de la fonction $f(t)$. Voici les propriétés fondamentales de l'intégrale de Laplace.

1°. Si l'intégrale (2.1) est convergente en un point p_0, elle le sera en tous les points p tels que $\operatorname{Re}(p - p_0) > 0$.

Trois cas sont à distinguer:

1) L'intégrale est partout divergente.

2) L'intégrale est partout convergente.

3) Il existe un nombre σ_c tel que l'intégrale est convergente pour $\operatorname{Re} p > \sigma_c$ et divergente pour $\operatorname{Re} p < \sigma_c$.

Dans le plan complexe, la droite $\operatorname{Re} p = \sigma_c$ est appelée *droite de convergence*, et le nombre σ_c l'*abscisse de convergence de l'intégrale* (2.1).

2°. Si l'intégrale (2.1) est absolument convergente en un point $p_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, elle le sera absolument et uniformément dans le demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma_0$.

On définirait de façon analogue la droite de convergence absolue $\operatorname{Re} p = \sigma_a$ et l'abscisse de convergence absolue σ_a. De toute évidence, $\sigma_a \geqslant \sigma_c$ et il est aisé d'exhiber des exemples où $\sigma_a > \sigma_c$.

3°. Si l'intégrale (2.1) est convergente en un point $p_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, elle le sera également dans un domaine Δ défini par l'inégalité

$$|p - p_0| \leqslant k(\sigma - \sigma_0)\, e^{Q(\sigma - \sigma_0)}, \qquad \sigma \geqslant \sigma_0,$$

où $Q \geqslant 0$ et $k \geqslant 1$ sont des constantes.

4°. Si $\sigma_c < \infty$, l'intégrale (2.1) est une fonction analytique de la variable p en tous les points du demi-plan $\operatorname{Re} p > \sigma_c$ et

$$\frac{d^k f^*(p)}{dp^k} = \int_0^\infty (-t)^k f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

5°. Soient $f_1^*(p)$ et $f_2^*(p)$ les transformées de Laplace des fonc tions $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Si les deux intégrales de Laplace sont convergentes en un point p_0 et

$$f_1^*(p_0 + nl) = f_2^*(p_0 + nl),$$

où l est une constante >0 et $n = 0, 1, 2, \ldots$, alors on aura partout $f_1(t) = f_2(t)$.

Cette propriété entraîne que la transformée $f^*(p)$ de Laplace définit la fonction $f(t)$ de façon unique, à un ensemble de mesure nulle près.

6°. Si l'intégrale (2.1) converge en un point $p_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, $\sigma_0 > 0$, alors

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma_0 t}\int_0^t f(u)\,du = 0,$$

i.e. $\int_0^t f(u)\,du = o(e^{\sigma_0 t})$ lorsque $t \to \infty$.

7°. Si : a) $f(t)$ est bornée inférieurement, i.e. il existe un nombre positif C tel que $f(t) > -C$ pour tous les $t \geqslant 0$, b) existe l'une des limites

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \lim_{\sigma\to\infty}\sigma\int_0^\infty f(t)\,e^{-\sigma t}\,dt = \lim_{\sigma\to\infty}\sigma f^*(\sigma),$$

l'autre existera également et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)\,dt = \lim_{\sigma\to\infty}\sigma f^*(\sigma).$$

8°. Si: a) $f(t)$ est bornée inférieurement et b) existe l'une des limites

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \lim_{\sigma\to 0}\sigma\int_0^\infty f(t)\,e^{-\sigma t}\,dt,$$

l'autre existera également et

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)\,dt = \lim_{\sigma\to 0}\sigma f^*(\sigma).$$

Les deux dernières propriétés de l'intégrale de Laplace découlent de la théorie générale des théorèmes taubériens [256], [257], [258].

Une condition nécessaire et suffisante de convergence de l'intégrale (2.1) est que pour un $\sigma_0 > 0$ et $t \to \infty$

$$f_1(t) = \int_0^t f(u)\,du = o(e^{\sigma_0 t}),$$

i.e.

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma_0 t} \int_0^t f(u)\,du = 0.$$

On a déjà dit que la transformée de Laplace définissait $f(t)$ de façon unique (à un ensemble de mesure nulle près). Voyons maintenant comment déterminer $f(t)$ si l'on connaît $f^*(p)$.

Théorème 1 (théorème d'inversion). *Si l'intégrale* (2.1) *admet* $\sigma_c < \infty$ *pour abscisse de convergence, alors il existe*

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} f^*(p)\frac{e^{pt}}{p}\,dp = \begin{cases} 0 \text{ pour } t<0, \\ \int_0^t f(u)\,du \text{ pour } t>0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $\gamma > \sigma_c$, $\gamma > 0$.
Donc, pour presque tous les t

$$f(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(p)\frac{e^{pt}}{p}\,dp, \tag{2.3}$$

où l'intégrale est prise dans sa valeur principale.

Remarque. La propriété 6° entraîne

$$\frac{f^*(p)}{p} = \int_0^\infty f_1(t)\,e^{-pt}\,dt,$$

où $f_1(t) = \int_0^t f(u)\,du$, $\sigma > \sigma_c$, $\sigma > 0$ et $p = \sigma + i\tau$. Il existe une constante Q telle que $|f_1(t)| < Qe^{\sigma_0 t}$ $(\sigma > \sigma_c)$ pour tous les t. Par conséquent,

$$\left|\frac{f^*(p)}{p}\right| \leqslant \frac{Q}{\sigma-\sigma_0}. \tag{2.4}$$

Donc, si

$$f^*(p) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt, \quad \sigma > \sigma_c \quad \text{et} \quad f_1(t) = \int_0^t f(u)\,du,$$

la transformée de Laplace de la fonction $f_1(t)$ sera $\frac{f^*(p)}{p}$ et, de plus, l'intégrale de Laplace convergera absolument pour $\sigma > \sigma_c$. Donc, si

$$f_n(t) = \int_0^t d\xi_n \int_0^{\xi_n} d\xi_{n-1} \ldots \int_0^{\xi_2} f(\xi_1)\, d\xi_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f(\xi)(t-\xi)^{n-1}\, d\xi,$$

alors

$$\frac{f^*(p)}{p^n} = \int_0^\infty f_n(t)\, e^{-pt}\, dt$$

et

$$f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} f^*(p) \frac{e^{pt}}{p^n}\, dp, \quad \gamma > \sigma_c. \tag{2.5}$$

L'inégalité (2.4) entraîne que l'intégrale de (2.5) convergera absolument et uniformément pour $n = 3$ sur tout intervalle $[a, b]$. Il est évident que cette intégrale convergera d'autant plus rapidement que le nombre n sera grand.

En général, on calcule les intégrales de (2.3) et (2.5) en déformant de façon convenable le chemin d'intégration ; souvent il est possible de se servir des lemmes suivants.

Lemme 1 (Jordan). *Soit C_n l'arc de cercle*

$$|z| = R_n, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} R_n = \infty.$$

Si sur C_n une fonction $\Phi(z)$ d'une variable complexe z tend uniformément en $\arg z$ vers 0 lorsque $n \to \infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \Phi(z)\, e^{zt}\, dz = 0 \qquad \textit{pour } t > 0.$$

Lemme 2. *Supposons que $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ et que C_n^+ et C_n^- sont respectivement les arcs de cercle*

$$|z| = R_n, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \gamma, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$
$$|z| = R_n, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \gamma, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

Si sur les arcs C_n^+, C_n^- $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ une fonction $\Phi(z)$ est uniformément bornée et tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n^+} \Phi(z)\, e^{zt}\, dz = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{C_n^-} \Phi(z)\, e^{zt}\, dz = 0.$$

L e m m e 3. *Soit* $\Phi(z)$ *une fonction analytique régulière dans le demi-plan* Re $z \geqslant \gamma$. *Si sur les arcs*

$$|z| = R_n, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (\lim_{n\to\infty} R_n = \infty),$$

la fonction $\Phi(z)$ *tend vers* 0 *lorsque* $n \to \infty$ *uniformément en* $\arg z$, *alors pour* $t < 0$

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \Phi(z) e^{zt}\, dz = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Phi(z) e^{zt}\, dz = 0.$$

Voyons comment on calcule une intégrale du type (2.3). Soit

$$\mathcal{L}[f(t, \tau)] = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\tau\sqrt{p}} \text{ *)},$$

i.e.

$$f(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\tau\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}}. \tag{2.6}$$

En vertu du théorème de Cauchy, l'intégration le long de la droite $L(a - ib, a + ib)$ équivaut à une intégration le long du contour composé des arcs C'_R et C''_R du cercle $|p| = R$, des bords B_1 et B_2 de la coupure et de l'arc de cercle c_r: $|p| = r$ $(-\pi < \arg p < \pi)$ (l'intégration a lieu dans le sens indiqué par les flèches sur la figure 1). Comme $\tau > 0$, la fonction $\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \to 0$ lorsque $R \to \infty$ sur les arcs C'_R et C''_R. Donc, en vertu du lemme de Jordan l'intégrale de l'expression $\frac{e^{-\tau\sqrt{p}+pt}}{\sqrt{p}}$ prise le long de C'_R et C''_R tend vers 0 lorsque $t > 0$ et $R \to \infty$. Par conséquent,

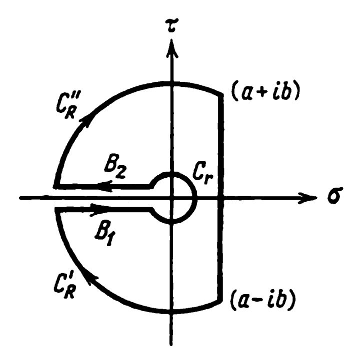


Fig. 1

$$f(t, \tau) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{B_1} + \int_{c_r} + \int_{B_2} \right\} e^{-\tau\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}}.$$

---

*) S'agissant des fonctions multivoques $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$, $\ln z$, $\operatorname{arctg} z$, etc., sauf mention du contraire, on considère toujours leur détermination principale, i.e. $\ln 1 = 0$ $(\arg 1 = 0)$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, etc.

Le long du bord B_1, on a $p = xe^{-i\pi}$, $\sqrt{p} = -i\sqrt{x}$; le long du bord B_2, on a $p = xe^{i\pi}$, $\sqrt{p} = i\sqrt{x}$. Donc,

$$\int_{B_1} = \int_R^r e^{i\tau\sqrt{x}-xt}\frac{dx}{i\sqrt{x}}, \quad \int_{B_2} = -\int_r^R e^{-i\tau\sqrt{x}-xt}\frac{dx}{i\sqrt{x}}.$$

Sur l'arc c_r, lorsque $r \to 0$, on a

$$\left|\int_{c_r}\right| < M\frac{2\pi r}{\sqrt{r}}$$

Donc pour $t > 0$

$$f(t, \tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt}\cos\tau\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-tu^2}\cos\tau u\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}, \tag{2.7}$$

où $x = u^2$. Pour $t < 0$, les intégrales de $\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\tau\sqrt{p}+pt}$ sur C'_R et C''_R $(R \to \infty)$ tendent vers 0, i.e. $f(t, \tau) = 0$ pour $t < 0$. Donc

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\right] = \frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\tau\sqrt{p}}. \tag{2.8}$$

Théorème 2. *Si l'intégrale* (2.1) *est absolument convergente, alors* $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty} f^*(\sigma + i\tau) = 0$ *et la convergence est uniforme pour tous les* σ $(\sigma \geqslant \sigma_1 > \sigma_a)$.

Théorème 3. *Si l'intégrale* (2.1) *est absolument convergente,* $H(z)$ *une fonction analytique au voisinage de chaque point* $z = f^*(p)$ *et* $H(0) = 0$, *alors la fonction* $\Phi(p) = H[f^*(p)]$ *est représentable par une intégrale de Laplace absolument convergente sur le demi-plan* $\operatorname{Re} p > \sigma_a$.

Il existe d'importants critères qui nous permettent d'établir si une fonction donnée (analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > \gamma$) est une transformée de Laplace ou non. Dans de nombreux cas, le théorème 3 nous fournit une réponse à cette question. Par exemple, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}$ est absolument convergente lorsque $\operatorname{Re} p > 0$. D'après le théorème 3 il vient que $\frac{1}{\sqrt{p+1}} - 1$ est intégrale absolument convergente de Laplace. Ceci entraîne la représentabilité de la

fonction $\left(\frac{1}{\sqrt{p+1}}-1\right) e^{\frac{1}{\sqrt{p+1}}-1}$ et ainsi de suite. On a en particulier le

Théorème 4. *Une fonction analytique régulière au voisinage d'un point situé à l'infini et nulle en ce point est représentable par une intégrale de Laplace absolument convergente.*

Enonçons d'autres théorèmes de même nature.

Théorème 5. *Supposons que dans le demi-plan* $\operatorname{Re} p > \gamma$ *une fonction analytique* $f^*(p)$ *remplisse les conditions:*

1°.
$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \frac{f^*(\sigma+i\tau)}{\sigma+i\tau}=0, \quad \sigma>\gamma,$$

la convergence étant uniforme dans le demi-plan.

2°. *Pour tous les* $t \in]-\infty, +\infty[$, *il existe*

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{f^*(p)}{p} e^{pt}\, dp = \Phi(t).$$

3°. *La fonction* $\Phi(t)$ *est absolument continue et existe l'intégrale*

$$F(p)=\int_0^\infty \Phi'(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Alors $f^*(p) \equiv F(p)$ *et, par conséquent,* $f^*(p)$ *est une transformée de Laplace.*

Théorème 6. *Si une fonction* $f^*(p)$ *est analytique dans le demi-plan* $\operatorname{Re} p > \gamma$ *et bornée dans chaque demi-plan* $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma_1 > \gamma$ *et si pour* $\sigma > \gamma$ *existe l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(\sigma+i\tau)|^r\, d\tau < \infty, \quad 1 \leqslant r \leqslant 2,$$

alors $f^*(p)$ *est représentable par l'intégrale de Laplace dans le demi-plan* $\operatorname{Re} p > \gamma$.

Théorème 7. *Si une fonction* $f^*(p)$ *analytique dans le demi-plan* $\operatorname{Re} p > \gamma$ *vérifie la condition*

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} |f^*(\sigma+i\tau)|^r\, d\tau < \infty,$$

où $1 \leqslant r \leqslant 2$, *alors* $f^*(p)$ *est représentable par l'intégrale de Laplace dans ce demi-plan.*

Théorème 8. *La condition*

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} |f^*(\sigma+i\tau)|^2\, d\tau < \infty$$

est nécessaire et suffisante pour que la fonction $f^*(p)$, *analytique dans le demi-plan* $\mathrm{Re}\, p > \gamma$, *soit la transformée de Laplace d'une fonction* $f(t)$ *telle que*

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-2\gamma t}\, dt < \infty.$$

Théorème 9. *Supposons que*

1°. $f^*(p)$ *est une fonction régulière dans toute région finie du plan de la variable complexe* p, *sauf aux pôles* $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ $(|p_1| \leqslant |p_2| \leqslant |p_3| \leqslant \ldots \leqslant |p_n| \leqslant \ldots)$ *de la fonction* $f^*(p)$, *où* $\mathrm{Re}\, p_n \leqslant \sigma_c$ *pour tous les* n.

2°. *Existe la*

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \frac{f^*(p)}{p} e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{f^*(p)}{p} e^{pt}\, dp,$$

$$\gamma > \sigma_c, \quad \gamma > 0.$$

3°. *Existe une suite de contours simples* C_n *d'extrémités les points* $\gamma + i\beta_n$ *et* $\gamma - i\beta_n$ *de la droite* $\mathrm{Re}\, p = \gamma$. (*Ces contours sont contenus*

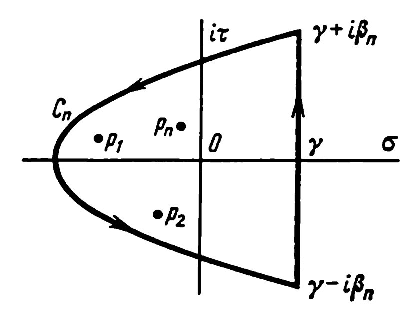


Fig. 2

dans le plan $\mathrm{Re}\, p < \gamma$ *et ne passent pas par les pôles* p_n.) *Chaque contour* C_n *renferme l'origine des coordonnées et les* n *premiers pôles* $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ (fig. 2).

4°. *Pour tous les* $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} f^*(p) \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 0.$$

Alors l'intégrale est égale à la somme d'une série convergente, soit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{f^*(p)}{p} e^{pt}\, dp \doteq \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t),$$

où $r_n(t)$ est le résidu de la fonction $\frac{f^*(p)}{p} e^{pt}$ *au point* $p = p_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *et* $r_0(t)$ *le résidu au point* 0.

R e m a r q u e. Si la fonction $\frac{1}{p} f^*(p)$ vérifie les conditions des lemmes 1 et 2, il semble naturel de choisir pour C_n des arcs de cercles centrés à l'origine des coordonnées.

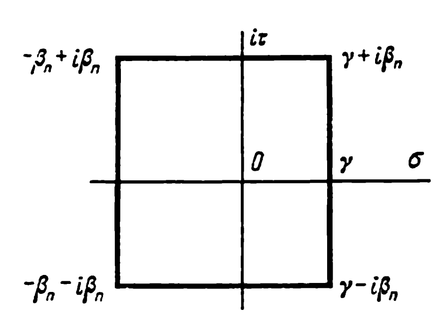


Fig. 3

Si existent un nombre $Q > 0$ et une suite de nombres positifs β_n et $\delta_n > 0$ tels que

1)

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

2)

$$\left|\frac{f^*(\sigma \pm i\beta_n)}{\sigma \pm i\beta_n}\right| < \delta_n, \quad \left|\frac{f^*(-\beta_n + i\tau)}{-\beta_n + i\tau}\right| < Q,$$
$$-\beta_n \leqslant \sigma \leqslant \gamma \quad \text{et} \quad |\tau| \leqslant \beta_n,$$

alors pour contours C_n on peut prendre le contour en forme de crochets représenté sur la figure 3.

§ 2. Théorèmes de convolution

On appelle *produit de convolution* ou *de composition* des fonctions $a(t)$ et $b(t)$ de la variable réelle t la fonction $c(t)$ définie par

$$c(t) = \int_0^t a(t - \tau)\, b(\tau)\, d\tau.$$

Ce produit est noté symboliquement

$$c(t) = a(t) * b(t).$$

Voici quelques propriétés du produit de convolution.

a) Commutativité

$$a(t) * b(t) = b(t) * a(t).$$

b) Associativité

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

c) Distributivité par rapport à la somme

$$[a(t) + b(t)] * c(t) = a(t) * c(t) + b(t) * c(t).$$

d) Théorème 10 (Titchmarsh). *Si le produit de convolution de fonctions a (t) et b (t) continues sur l'intervalle* $[0, \infty[$ *est identiquement nul, l'une au moins de ces fonctions l'est également.*

Ce théorème a été démontré par Titchmarsh en 1924 [238], [236]. D'autres démonstrations ont été proposées par la suite [61], [204], [261].

Théorème 11 *) (*théorème de convolution*). *Si les intégrales*

$$f_1^*(p) = \int_0^\infty f_1(t) e^{-pt}\, dt \quad \text{et} \quad f_2^*(p) = \int_0^\infty f_2(t) e^{-pt}\, dt$$

sont absolument convergentes pour $\operatorname{Re} p > \sigma_a$, *alors* $f^*(p) = f_1^*(p) f_2^*(p)$ *est la transformée de Laplace de la fonction*

$$f(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau$$

et l'intégrale

$$f^*(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re} p > \sigma_a$.

Enonçons ce théorème sous la forme suivante.

Théorème 11'. *Si* $\frac{\bar{f}(p)}{p}$, $\frac{\bar{g}(p)}{p}$ *et* $\frac{\bar{f}(p)\bar{g}(p)}{p}$ *sont les transformées de Laplace respectivement des fonctions f (t), g (t) et h (t), alors presque partout*

$$h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

Faisons une remarque relativement à ce théorème. Supposons que

$$f_1^*(p) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{-pt} f_1(t)\, dt, \quad \beta_1 > \alpha_1 \tag{2.9}$$

*) Ce théorème est parfois appelé *théorème de multiplication* ou *de Borel*.

et

$$f_2^*(p)=\int_{\alpha_2}^{\beta_2} e^{-pt}f_2(t)\,dt,\quad \beta_2>\alpha_2. \tag{2.10}$$

Il vient alors

$$f_1^*(p)\,f_2^*(p)=\int_{\alpha_1+\alpha_2}^{\beta_1+\beta_2} e^{-pt}f(t)\,dt, \tag{2.11}$$

où

$$f(t)=\int_{\max(\alpha_1;\ t-\beta_2)}^{\min(\beta_1;\ t-\alpha_2)} f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{2.12}$$

La démonstration de (2.11) et (2.12) utilise l'intégrabilité absolue de (2.9) et (2.10).

Théorème 12. *Soient données deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ d'indice de croissance s_1 et s_2, i.e.*

$$|f(t)|<Me^{s_1t},\quad |g(t)|<Me^{s_2t}.$$

La transformée de Laplace du produit $f(t)\,g(t)$ est la fonction

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f^*(z)\,g^*(p-z)\,dz,$$

où

$$a>s_1 \quad et \quad \operatorname{Re} p>s_2+a,$$

$$f^*(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt,\qquad g^*(p)=\int_0^\infty e^{-pt}g(t)\,dt.$$

A. Efros a démontré en 1935 un théorème de multiplication généralisé qui est d'une grande importance. Enonçons-le.

Théorème 13 *). *Soient $f^*(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$ et $g^*(p)$ et $q(p)$ des fonctions analytiques telles que*

$$g^*(p)\,e^{-\tau q(p)}=\int_0^\infty e^{-pt}g(t,\tau)\,dt.$$

Alors

$$f^*[q(p)]\,g^*(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\,dt\int_0^\infty f(\tau)\,g(t,\tau)\,d\tau.$$

---

*) Les hypothèses exactes de ce théorème sont données au chapitre V, § 12.

Si en particulier on pose $q(p) = p$, $\int\limits_0^\infty e^{-pt} g(t, \tau)\, dt = e^{-p\tau} g^*(p)$, i. e. $g(t, \tau) = g(t-\tau)$, on obtient (pour $\tau > t$, $g(t-\tau) = 0$)

$$f^*(p)\, g^*(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\, dt \int\limits_0^\infty f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-pt}\, dt \int\limits_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

§ 3. Quelques propriétés de la transformée de Laplace

Voici quelques propositions simples constituant l'appareil de la méthode opérationnelle. Dans toute la suite on adoptera les notations

$$f^*(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \mathcal{L}\,[f(t)], \tag{2.13}$$

$$\overline{f}(p) = p \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = C\,[f(t)]. \tag{2.14}$$

1°. *Propriétés de linéarité.* Soit

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t),$$

où c_k sont des constantes (complexes) arbitraires. Alors

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \mathcal{L}\,[\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)] = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{L}\,[f_k(t)] = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k^*(p) = f^*(p). \tag{2.15}$$

D'après (2.15) on a formellement

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{d\lambda} f(t, \lambda)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{f(t, \lambda + d\lambda) - f(t, \lambda)}{d\lambda}\right] =$$

$$= \frac{f^*(p, \lambda + d\lambda) - f^*(p, \lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} f^*(p, \lambda), \tag{2.16}$$

$$\mathcal{L}\left[\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(t, \lambda)\, d\lambda\right] = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L}\,[f(t, \lambda)]\, d\lambda = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} f^*(p, \lambda)\, d\lambda. \tag{2.17}$$

Des propriétés analogues ont lieu pour la transformée de Laplace-Carson (2.14).

2°. *Propriété de similitude.* Pour toute constante α, on a

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-pt}\,dt=\alpha\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-\alpha p\tau}\,d\tau=\alpha f^*(\alpha p), \qquad (2.18)$$

$$C\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]=p\int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-pt}\,dt=\alpha p\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-\alpha p\tau}\,d\tau=\bar{f}(\alpha p). \qquad (2.19)$$

3°. *Transformée de Laplace de dérivées.* Une intégration par parties nous donne aussitôt

$$\mathcal{L}\,[f^{(n)}(t)]=p^n f^*(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-p^{n-3}f''(0)-\dots$$
$$\dots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0), \qquad (2.20)$$

$$C\,[f^{(n)}(t)]=p^n\bar{f}(p)-p^n f(0)-p^{n-1}f'(0)-p^{n-2}f''(0)-\dots$$
$$\dots-p^2f^{(n-2)}(0)-pf^{(n-1)}(0), \qquad (2.21)$$

où n est un entier positif.

La propriété duale de 3° est

4°. *Différentiation de la transformée de Laplace.* Pour n entier positif, on a

$$\frac{d^nf^*(p)}{dp^n}=(-1)^n\int_0^\infty t^nf(t)\,e^{-pt}\,dt=(-1)^n\,\mathcal{L}\,[t^nf(t)], \qquad (2.22)$$

$$\frac{d^n\bar{f}(p)}{dp^n}=(-1)^n\,C\left[t^nf(t)-n\int_0^t t^{n-1}f(t)\,dt\right]. \qquad (2.23)$$

5°. *Transformée de Laplace d'intégrales.* Pour n entier positif on a

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t d\tau\int_0^\tau d\tau_1\,\dots\int_0^{\tau_{n-2}} f(\tau_{n-1})\,d\tau_{n-1}\right]=\frac{f^*(p)}{p^n}. \qquad (2.24)$$

6°. *Intégration de la transformée de Laplace.* Si l'intégrale $\int_d^\infty f^*(q)\,dq$ est convergente, elle est la transformée de Laplace de la fonction $\frac{f(t)}{t}$, i.e.

$$\int_p^\infty f^*(q)\,dq=\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]. \qquad (2.25)$$

Pour tout n entier positif, on a de toute évidence

$$\int_p^\infty dq\int_q^\infty dq_1\,\dots\int_{q_{n-2}}^\infty f^*(q_{n-1})\,dq_{n-1}=\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]. \qquad (2.26)$$

Citons encore quelques formules de la même nature. Une intégration de l'expression

$$f^*(\alpha p)=\int_0^\infty \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{1}{\alpha}\right) e^{-pt}\,dt$$

par rapport à α entre 0 et 1 donne

$$\int_0^1 f^*(\alpha p)\,d\alpha=\int_0^\infty e^{-pt}\,dt\int_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\frac{d\alpha}{\alpha}=\mathcal{L}\left[\int_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\frac{d\alpha}{\alpha}\right].$$

En posant $\alpha p=q$, $t=\alpha\tau$, il vient

$$\mathcal{L}\left[\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau\right]=\frac{1}{p}\int_0^p f^*(q)\,dq. \tag{2.27}$$

De façon analogue,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau\right]=\frac{1}{p}\int_p^\infty f^*(q)\,dq. \tag{2.28}$$

D'où

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau\right]=\frac{1}{p}\int_0^\infty f^*(q)\,dq, \tag{2.29}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau=\int_0^\infty f^*(q)\,dq. \tag{2.30}$$

7°. Pour tout τ positif et puisque $f(t-\tau)=0$ lorsque $t<\tau$, il est aisé d'obtenir

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=\int_\tau^\infty f(t-\tau)\,e^{-pt}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty f(u)\,e^{-p(u+\tau)}\,du=e^{-p\tau}\int_0^\infty f(u)\,e^{-pu}\,du,$$

i. e.

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}f^*(p). \tag{2.31}$$

8°. Pour tout q complexe, on a

$$f^*(p-q)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-(p-q)t}\,dt=\int_0^\infty [f(t)\,e^{qt}]\,e^{-pt}\,dt=\mathcal{L}[f(t)\,e^{qt}], \tag{2.32}$$

$$\bar{f}(p-q)=(p-q)\int_0^\infty f(t)\,e^{-(p-q)t}\,dt=p\int_0^\infty [f(t)\,e^{qt}]\,e^{-pt}\,dt-$$

$$-\frac{q}{p}\,p\int_0^\infty [f_1(t)\,e^{qt}]\,e^{-pt}\,dt=C\left[f(t)\,e^{qt}-q\int_0^t f(\tau)\,e^{q\tau}\,d\tau\right]. \qquad (2.33)$$

Formulons encore deux théorèmes importants qui nous seront très utiles pour résoudre un grand nombre de problèmes pratiques.

Théorème 14 (premier théorème de développement). *Si une fonction $f^*(p)$ est régulière au point infini* [132] *et admet en son voisinage le développement de Laurent*

$$f^*(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k},$$

alors

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}=\mathscr{L}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}\,t^{k-1}\right). \qquad (2.34)$$

Ceci étant

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}\,t^{k-1}$$

est une fonction entière.

Théorème 15 (deuxième théorème de développement). *Soit une fonction $f^*(p)$ vérifiant les conditions suivantes:*

1°. *$f^*(p)$ est méromorphe et régulière dans un demi-plan* $\operatorname{Re} p > s_0$.

2°. *Il existe un système de cercles emboîtés*

$$C_n:\ |p|=R_n,\quad R_1<R_2<\ldots,\ R_n\to\infty,$$

sur lequel $f^*(p)$ tend uniformément vers 0 par rapport à $\arg p$.

3°. *Quel que soit $a>s_0$, est absolument convergente l'intégrale*

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f^*(p)\,dp,$$

et

$$f^*(p)=\mathscr{L}\left(\sum_{p_k}\operatorname{res}_{p_k} f^*(p)\,e^{pt}\right), \qquad (2.35)$$

où la somme des résidus est calculée en tous les points singuliers p_k de la fonction $f^*(p)$ dans l'ordre de non-décroissance de leurs modules.

Corollaire. *La fonction homographique*

$$f^*(p)=\frac{M(p)}{N(p)}=\frac{a_mp^m+a_{m-1}p^{m-1}+\ldots+a_1p+a_0}{b_np^n+b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_1p+b_0},\quad m<n, \tag{2.36}$$

est la transformée de Laplace de la fonction

$$f(t)=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\{f^*(p)(p-p_k)^{n_k}e^{pt}\}, \tag{2.37}$$

où p_k sont les pôles de $f^*(p)$, n_k leurs multiplicités, la somme des résidus est calculée en tous les pôles.

En particulier, si tous les pôles de $f^*(p)$ sont simples, en calculant les résidus en ces pôles, on obtient

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{M(p_k)}{N'(p_k)}e^{p_kt}.$$

Si les polynômes $M(p)$ et $N(p)$ possèdent des coefficients réels, alors

$$f^*(p)=\frac{M(p)}{N(p)}=\mathcal{L}\left(\sum\frac{M(p_k)}{N'(p_k)}e^{p_kt}+2\,\mathrm{Re}\sum\frac{M(p_k)}{N'(p_k)}e^{p_kt}\right), \tag{2.38}$$

où la première somme s'étend à toutes les racines réelles de $N(p)$, et la seconde à toutes les racines complexes à partie imaginaire positive.

On remarquera que dans la formule (2.37) le terme qui correspond à la racine complexe $p_k=\sigma_k+i\tau_k$ a pour expression

$$\frac{M(p_k)}{N'(p_k)}e^{\sigma_kt}(\cos\tau_kt+i\sin\tau_kt).$$

§ 4. Transformées de Laplace de quelques fonctions élémentaires

Par définition de la *fonction* eulérienne Γ on a

$$\Gamma(k+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^k\,dt,\quad \mathrm{Re}\,k>-1.$$

En posant $t=p\tau$, on obtient

$$\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}=\int_0^\infty e^{-p\tau}\tau^k\,d\tau.$$

Donc

$$\mathcal{L}(t^k)=\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}},\quad \mathrm{Re}\,k>-1. \tag{2.39}$$

En particulier, pour les k entiers non négatifs

$$\mathscr{L}(t^k) = \frac{n!}{p^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.40}$$

Une dérivation par rapport au paramètre k de (2.39) donne

$$\mathscr{L}(t^k \ln t) = \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}} [\psi(k+1) - \ln p], \quad \operatorname{Re} k > -1,$$

où ψ est la dérivée logarithmique de la fonction Γ. En faisant $k = 0$, on obtient

$$\mathscr{L}(\ln t) = -\frac{1}{p}(C + \ln p),$$

où

$$C = -\psi(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}577215665\ldots$$

est la *constante d'Euler*.

En se servant des développements

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

et compte tenu de (2.40), on obtiendrait

$$\mathscr{L}(\cos t) = \frac{p}{p^2+1}, \quad \mathscr{L}(\sin t) = \frac{1}{p^2+1}. \tag{2.41}$$

Cherchons l'image de la fonction $t^{\frac{k}{2}} J_k(2\sqrt{t})$, où k est un nombre complexe, $\operatorname{Re} k > -1$, et $J_k(t)$ la *fonction de Bessel* d'ordre k

$$J_k(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

En posant $t = 2\sqrt{z}$, on a

$$J_k(2\sqrt{z}) = z^{\frac{k}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{z^n}{\Gamma(n+k+1)},$$

$$\mathscr{L}\{t^{\frac{k}{2}} J_k(2\sqrt{t})\} = \mathscr{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{p^{n+k+1}} = \frac{1}{p^{k+1}} e^{-\frac{1}{p}}, \quad \operatorname{Re} k > -1. \tag{2.42}$$

Introduisons les *polynômes de Laguerre*

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Compte tenu de (2.33) et (2.40), il vient

$$\mathscr{L}\{g(t)\}=\mathscr{L}\{t^n e^{-t}\}=\frac{n!}{(p+1)^{n+1}}=g^*(p).$$

Comme $g(0)=g'(0)=g''(0)=\ldots=g^{(n-1)}(0)=0$, moyennant (2.20) on trouve

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right\}=\frac{n!p^n}{(p+1)^{n+1}}.$$

Et enfin, en se servant encore de (2.33)

$$\mathscr{L}\{L_n(t)\}=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.43}$$

§ 5. Calcul d'intégrales

Citons quelques exemples concrets. Soit

$$f(t)=\int_0^\infty \frac{u\sin tu}{1+u^2}\,du,\quad t>0. \tag{2.44}$$

En appliquant (2.41) et (2.33), il vient $\mathscr{L}\{u\sin tu\}=\frac{u^2}{p^2+u^2}$,

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{(p^2+u^2)(1+u^2)}=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{p+1}=\mathscr{L}\left\{\frac{\pi}{2}e^{-t}\right\}.$$

Donc, $f(t)=\frac{\pi}{2}e^{-t}$. Considérons l'intégrale

$$I=\int_0^\infty \frac{J_k(u)\,du}{u^{k-n+1}},\quad k+1>\frac{n}{2}>0. \tag{2.45}$$

En posant $u=2\sqrt{t}$, on trouve

$$I=\frac{1}{2^{k-n+1}}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{k}{2}}J_k(2\sqrt{t})}{t^{\frac{2k-n+2}{2}}}\,dt.$$

Introduisons l'intégrale $I(\lambda)=\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{\frac{k}{2}}J_k(2\sqrt{\lambda t})}{t^{\frac{2k-n+2}{2}}}\,dt$. En vertu de (2.42) et (2.18), il vient

$$\mathscr{L}\{t(\lambda t)^{\frac{k}{2}}J_k(2\sqrt{\lambda t})\}=\left(\frac{t}{p}\right)^{k+1}e^{-\frac{1}{p}}.$$

Donc

$$\mathcal{L}\{I(\lambda)\} = \frac{1}{p^{k+1}} \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{p}} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{p^{k+1-\frac{n}{2}}} = \mathcal{L}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\lambda^{k-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(k+1-\frac{n}{2}\right)}\right\},$$

d'où

$$I = \frac{1}{2^{k-n+1}} I(1) = \frac{1}{2^{k-n+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(k+1-\frac{n}{2}\right)}.$$

Calculons enfin l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{J_0(t)-\cos t}{t} dt,$$

où J_0 est la *fonction de Bessel d'ordre zéro*. On a

$$\mathcal{L}\{J_0(t)-\cos t\} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{p}{p^2+1}.$$

Donc, en vertu de (2.30)

$$\int_0^\infty \frac{J_0(t)-\cos t}{t} dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{p}{p^2+1}\right) dp =$$

$$= \left[\ln \frac{p+\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{p^2+1}}\right]_0^\infty = \ln 2.$$

§ 6. Application de la transformation de Laplace à la résolution des équations différentielles et intégrales

1. Soit donnée l'équation différentielle

$$a_n u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = f(t), \quad (2.46)$$

où $u(t)$ est la fonction inconnue de la variable indépendante t, $f(t)$ une fonction « perturbatrice » donnée et a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) des coefficients constants [171]. En multipliant les deux membres de (2.46) par e^{-pt} et en intégrant par rapport à t de zéro à l'infini, il vient:

$$a^*(p)\,u^*(p) - b^*(p) = f^*(p), \quad (2.47)$$

où

$$a^*(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0, \quad (2.48)$$

$$b^*(p) = b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0, \quad (2.49)$$

et

$$\left.\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n u(0),\\
b_{n-2} &= a_n u'(0) + a_{n-1} u(0),\\
b_{n-3} &= a_n u''(0) + a_{n-1} u'(0) + a_{n-2} u(0),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_1 &= a_n u^{(n-2)}(0) + a_{n-1} u^{(n-3)}(0) + \ldots + a_2 u(0),\\
b_0 &= a_n u^{(n-1)}(0) + a_{n-1} u^{(n-2)}(0) + \ldots\\
&\qquad \ldots + a_2 u'(0) + a_1 u(0).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.50)$$

En résolvant l'équation (2.47) par rapport à $u^*(p)$, on obtient la formule suivante :

$$u^*(p) = \frac{f^*(p) + b^*(p)}{a^*(p)}. \qquad (2.51)$$

Posons

$$r^*(p) = \frac{1}{a^*(p)}, \quad s^*(p) = \frac{b^*(p)}{a^*(p)}. \qquad (2.52)$$

Donc

$$u^*(p) = f^*(p)\, r^*(p) + s^*(p). \qquad (2.53)$$

Les quantités $r^*(p)$ et $s^*(p)$ sont des fractions rationnelles qui, par des méthodes standard, peuvent être décomposées en fractions élémentaires. Le théorème de convolution donne

$$u(t) = \int_0^t f(\tau)\, r(t-\tau)\, d\tau + s(t) \qquad (2.54)$$

Nous avons obtenu la solution générale de l'équation (2.46). Cette solution contient n constantes arbitraires qui sont les valeurs initiales de la fonction inconnue $u(t)$ et de ses $n-1$ dérivées. L'allure de cette solution dépendra de la nature des racines caractéristiques de l'équation

$$a^*(p) = 0. \qquad (2.55)$$

1°. Toutes les racines de l'équation (2.55) sont réelles et distinctes :

$$a^*(p) = a_n (p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_n). \qquad (2.56)$$

On a alors

$$r^*(p) = \frac{r_1}{p-p_1} + \frac{r_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{r_n}{p-p_n},$$

$$s^*(p) = \frac{s_1}{p-p_1} - \frac{s_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{s_n}{p-p_n},$$

où les coefficients constants r_k et s_k se déterminent par les formules

$$r_k = \frac{1}{a^{*\prime}(p_k)}, \qquad s_k = \frac{b^*(p_k)}{a^{*\prime}(p_k)},$$

$$b^*(p_k) = u(0) \sum_{l=1}^{n} a_l p_k^{l-1} + u'(0) \sum_{l=2}^{n} a_l p_k^{l-2} + \ldots$$

$$\ldots + u^{(n-2)}(0) \sum_{l=n-1}^{n} a_l p_k^{l-n+1} + u^{(n-1)}(0)\, a_n.$$

Donc,

$$r(t) = \sum_{k=1}^{n} r_k e^{p_k t}, \quad s(t) = \sum_{k=1}^{n} s_k e^{p_k t}. \tag{2.57}$$

En portant (2.57) dans (2.54), il vient

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{p_k t}}{a^{*\prime}(p_k)} \left[\int_0^t f(\tau)\, e^{-p_k \tau}\, d\tau + b^*(p_k) \right]. \tag{2.58}$$

2°. L'équation (2.55) possède des racines nulles:

$$a^*(p) = a_n p^n \tag{2.59}$$

et

$$r^*(p) = \frac{1}{a_n p^n},$$

$$s^*(p) = \frac{b_{n-1}}{a_n} \frac{1}{p} + \frac{b_{n-2}}{a_n} \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{b_1}{a_n} \frac{1}{p^{n-1}} + \frac{b_0}{a_n} \frac{1}{p^n}.$$

Alors

$$r(t) = \frac{1}{a_n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$s(t) = \frac{b_{n-1}}{a_n} + \frac{b_{n-2}}{a_n} \frac{t}{1!} + \ldots + \frac{b_1}{a_n} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{b_0}{a_n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Dans ce cas l'équation (2.54) s'écrit

$$u(t) = \frac{1}{a_n} \int_0^t f(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-1-k}}{a_n} \frac{t^k}{k!}. \tag{2.60}$$

3°. Les racines de (2.55) sont réelles et confondues, i.e.

$$a^*(p) = a_n (p - p_1)^n, \tag{2.61}$$

donc

$$r^*(p) = \frac{1}{a_n (p - p_1)^n},$$

$$s^*(p) = \frac{b^*(p)}{a_n (p-p_1)^n} = \frac{c_n}{(p-p_1)^n} + \frac{c_{n-1}}{(p-p_1)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_1}{p-p_1},$$

où c_k sont des fonctions homogènes linéaires des données initiales que l'on définit par des méthodes standard en décomposant des fractions rationnelles en fractions simples. On trouve

$$r(t)=\frac{t^{n-1}}{a_n(n-1)!}e^{p_1t}, \quad s(t)=e^{p_1t}\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1}.$$

La formule (2.54) se détaille comme suit

$$u(t)=\int_0^t f(\tau)\frac{(t-\tau)^{n-1}e^{p_1(t-\tau)}}{a_n(n-1)!}d\tau+e^{p_1t}\sum_{k=1}^{n}\frac{c_kt^k}{(k-1)!}. \tag{2.62}$$

Dans le cas général, le polynôme $a^*(p)$ se présente sous la forme

$$a^*(p)=a_n(p-p_1)\ldots(p-p_i)(p-p_{i+1})^l(p^2+b_1p+c_1)\ldots$$
$$\ldots(p^2+b_kp+c_k)(p^2+b_{k+1}p+c_{k+1})^m\ldots \tag{2.63}$$

Donc

$$r^*(p)=\sum_{\alpha=1}^{i}\frac{A_\alpha}{p-p_\alpha}+\sum_{\beta=1}^{l}\frac{B_\beta}{(p-p_{i+1})^\beta}+\sum_{\gamma=1}^{k}\frac{C_\gamma p+D_\gamma}{p^2+b_\gamma p+c_\gamma}+$$
$$+\sum_{\delta=1}^{m}\frac{C_\delta p+D_\delta}{(p^2+b_{k+1}p+c_{k+1})^\delta}+\ldots,$$

$$s^*(p)=\sum_{\alpha=1}^{i}\frac{A'_\alpha}{p-p_\alpha}+\sum_{\beta=1}^{l}\frac{B'_\beta}{(p-p_{i+1})^\beta}+\sum_{\gamma=1}^{k}\frac{C'_\gamma p+D'_\gamma}{p^2+b_\gamma p+c_\gamma}+$$
$$+\sum_{\delta=1}^{m}\frac{C'_\delta p+D'_\delta}{(p^2+b_{k+1}p+c_{k+1})^\delta}+\ldots,$$

où les coefficients A_α, B_β, C_γ, C_δ, D_γ, D_δ, A'_α, B'_β, C'_γ, C'_δ, D'_γ, D'_δ sont des constantes, et en outre A'_α, B'_β, C'_γ, C'_δ, D'_γ, C'_δ sont des fonctions homogènes linéaires des données initiales. Les fonctions $r(t)$ et $s(t)$ s'explicitent comme suit:

$$r(t)=\sum_{\alpha=1}^{i}A_\alpha e^{p_\alpha t}+\sum_{\beta=1}^{l}\frac{B_\beta}{(\beta-1)!}t^{\beta-1}e^{p_{i+1}t}+$$
$$+\sum_{\gamma=1}^{k}e^{-\frac{b_\gamma}{2}t}\left[C_\gamma\cos\varphi_\gamma t+\frac{2D_\gamma-C_\gamma b_\gamma}{2\varphi_\gamma}\sin\varphi_\gamma t\right]+$$
$$+e^{-\frac{b_{k+1}}{2}t}\sum_{\delta=1}^{m}\Big[\frac{C}{\text{[illegible]}}\int_0^t\int_0^{\tau_{\delta-1}}\ldots\int_0^{\tau_2}\cos\varphi_{k+1}\tau_1\times$$

$$\times \sin \varphi_{k+1}(\tau_2-\tau_1)\ldots \sin \varphi_{k+1}(t-\tau_{\delta-1})\, d\tau_1 \ldots d\tau_{\delta-1}+$$

$$+\frac{2D_\delta - C_\delta b_{k+1}}{2\varphi_{k+1}^{\delta}}\int_0^t\int_0^{\tau_{\delta-1}}\ldots\int_0^{\tau_2}\sin \varphi_{k+1}\tau_1 . \sin \varphi_{k+1}(\tau_2-\tau_1)\ldots$$

$$\ldots \sin \varphi_{k+1}(t-\tau_{\delta-1})\, d\tau_1 \ldots d\tau_{\delta-1}\Big]+\ldots,$$

$$s(t)=\sum_{\alpha=1}^{i} A'_\alpha e^{p_\alpha t}+\sum_{\beta=1}^{l}\frac{B'_\beta}{(\beta-1)!}t^{\beta-1}e^{p_{i+1}t}+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{k} e^{-\frac{b_\gamma}{2}t}\left[C'_\gamma \cos \varphi_\gamma t+\frac{2D'_\gamma - C'_\gamma \beta_\gamma}{2\varphi_\gamma}\sin \varphi_\gamma t\right]+$$

$$+e^{-\frac{b_{k+1}}{2}t}\sum_{\delta=1}^{m}\Big[\frac{C'_\delta}{\varphi_{k+1}^{\delta-1}}\int_0^t\int_0^{\tau_{\delta-1}}\ldots\int_0^{\tau_2}\cos \varphi_{k+1}\tau_1 \times$$

$$\times \sin \varphi_{k+1}(\tau_2-\tau_1)\ldots \sin \varphi_{k+1}(t-\tau_{\delta-1})\, d\tau_1 \ldots d\tau_{\delta-1}+$$

$$+\frac{2D'_\delta - C'_\delta b_{k+1}}{2\varphi_{k+1}^{\delta}}\int_0^t\int_0^{\tau_{\delta-1}}\ldots\int_0^{\tau_2}\sin \varphi_{k+1}\tau_1 . \sin \varphi_{k+1}(\tau_2-\tau_1)\ldots$$

$$\ldots \sin \varphi_{k+1}(t-\tau_{\delta-1})\, d\tau_1 \ldots d\tau_{\delta-1}\Big]+\ldots,$$

où

$$\varphi_\gamma=\sqrt{c_\gamma-\frac{b_\gamma^2}{4}},$$

$$\varphi_{k+1}=\sqrt{c_{k+1}-\frac{b_{k+1}^2}{4}}.$$

En portant les expressions de $r(t)$ et $s(t)$ dans la formule (2.54) on obtient la solution générale de l'équation différentielle étudiée.

2. Soit un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants a_{ik}, dont les termes $f_i(t)$ sont des fonctions données du temps

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+f_1(t),\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+f_2(t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{nn}x_n+f_n(t).\end{aligned}\right\}\qquad(2.64)$$

En multipliant chaque équation du système par e^{-pt} et en intégrant par rapport à t de 0 à ∞, on obtient

$$\left.\begin{aligned}&(a_{11}-p)\,x_1^*(p)+a_{12}x_2^*(p)+\ldots+a_{1n}x_n^*(p)=\\&\qquad=-[f_1^*(p)+x_1(0)],\\&a_{21}x_1^*(p)+(a_{22}-p)\,x_2^*(p)+\ldots+a_{2n}x_n^*(p)=\\&\qquad=-[f_2^*(p)+x_2(0)],\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&a_{n1}x_1^*(p)+a_{n2}x_2^*(p)+\ldots+(a_{nn}-p)\,x_n^*(p)=\\&\qquad=-[f_n^*(p)+x_n(0)].\end{aligned}\right\}\tag{2.65}$$

La résolution de ce système donne

$$x_k^*=\frac{\Delta_k}{\Delta(p)}\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\tag{2.66}$$

où

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix}(a_{11}-p) & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & (a_{22}-p) & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn}-p)\end{vmatrix}$$

est le déterminant principal du système d'équations (2.65),

$$\Delta_k=-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}f_i\Delta_{ik}(p)-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}x_i(0)\,\Delta_{ik}(p),$$

et

$$\Delta_{ik}(p)=\begin{vmatrix}(a_{11}-p) & a_{12} & \ldots & a_{1,\,k-1} & a_{1,\,k+1} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & (a_{22}-p) & \ldots & a_{2,\,k-1} & a_{2,\,k+1} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i-1,\,1} & a_{i-1,\,2} & \ldots & a_{i-1,\,k-1} & a_{i-1,\,k+1} & \ldots & a_{i-1,\,n}\\ a_{i+1,\,1} & a_{i+1,\,2} & \ldots & a_{i+1,\,k-1} & a_{i+1,\,k+1} & \ldots & a_{i+1,\,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,\,k-1} & a_{n,\,k+1} & \ldots & (a_{nn}-p)\end{vmatrix}$$

est le mineur obtenu par suppression de la i-ième ligne et la k-ième colonne. Donc, la formule (2.66) peut encore s'écrire

$$x_k^*(p)=\sum_{i=1}^{n}f_i^*(p)\,D_{ik}^*(p)+\sum_{i=1}^{n}x_i(0)\,D_{ik}^*(p)\tag{2.67}$$

où

$$D_{ik}^*(p)=(-1)^{i+k+1}\,\frac{\Delta_{ik}(p)}{\Delta(p)}$$

sont des fractions rationnelles de p dont le degré du numérateur $\Delta_{ik}(p)$ est inférieur d'au moins une unité à celui, égal à n, du dénominateur $\Delta(p)$. Pour décomposer $D_{ik}^*(p)$ en fractions simples, il faut connaître les racines de l'équation $\Delta(p) = 0$. Une fois qu'on a déterminé la fonction $x_k^*(p)$ à partir de (2.67) et ensuite $x_k(t)$, on a

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t f_i(\tau) D_{ik}(t-\tau)\, d\tau + \sum_{i=1}^{n} x_i(0) D_{ik}(t).$$

Cette méthode peut être appliquée à des systèmes d'équations linéaires d'ordre supérieur

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ a_{\nu k} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + b_{\nu k} \frac{dx_k}{dt} + c_{\nu k} x_k \right\} = f_\nu t \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_k(0) = \alpha_k, \quad x_k'(0) = \beta_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation. On obtiendra l'équation suivante:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{\nu k} p^2 + b_{\nu k} p + c_{\nu k})\, x_k^*(p) = f_\nu^*(p) + \sum_{k=1}^{n} [(a_{\nu k} p + b_{\nu k})\, \alpha_k + a_{\nu k} \beta_k].$$

D'où l'on déduit $x^*(p)$ par les méthodes de l'algèbre linéaire. Sans exhiber de formules générales, considérons à titre d'exemple le système de deux équations linéaires du second ordre

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + A_{11} \frac{dx_1}{dt} + A_{12} \frac{dx_2}{dt} &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + f_1(t), \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + A_{21} \frac{dx_1}{dt} + A_{22} \frac{dx_2}{dt} &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + f_2(t), \end{aligned}\right\} \qquad (2.68)$$

où x_1 et x_2 sont les fonctions inconnues de t, $f_1(t)$ et $f_2(t)$ des fonctions « perturbatrices » du temps données, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} des coefficients constants.

En multipliant chaque équation du système (2.68) par e^{-pt} et en intégrant par rapport à t de 0 à ∞, on obtient

$$\begin{aligned} p^2 x_1^* - p x_1(0) - x_1'(0) + p A_{11} x_1^* - A_{11} x_1(0) + A_{12} p x_2^* - \\ - A_{12} x_2(0) = a_{11} x_1^* + a_{12} x_2^* + f_1^*, \\ p^2 x_2^* - p x_2(0) - x_2'(0) + p A_{21} x_1^* - A_{21} x_1(0) + A_{22} p x_2^* - \\ - A_{22} x_2(0) = a_{21} x_1^* + a_{22} x_2^* + f_2^*. \end{aligned}$$

Après réduction des termes semblables, il vient

$$\left.\begin{aligned} (p^2 + pA_{11} - a_{11})\, x_1^* + (A_{12} p - a_{12})\, x_2^* = \\ = f_1^* + (p + A_{11})\, x_1(0) + A_{12} x_2(0) + x_1'(0), \\ (A_{21} p - a_{21})\, x_1^* + (p^2 + pA_{22} - a_{22})\, x_2^* = \\ = f_2^* + A_{21} x_1(0) + (p + A_{22})\, x_2(0) + x_2'(0). \end{aligned}\right\} \qquad (2.69)$$

Donc,

$$x_k^* = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad (k = 1,\ 2), \tag{2.70}$$

où Δ est le déterminant principal du système d'équations (2.69)

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p^2 + A_{11}p - a_{11}) & (A_{12}p - a_{12}) \\ (A_{21}p - a_{21}) & (p^2 + A_{22}p - a_{22}) \end{vmatrix}.$$

Les quantités Δ_1 et Δ_2 se calculent à l'aide des formules

$$\Delta_1 = f_1^*\gamma_{11}^* - f_2^*\gamma_{12}^* + \delta_1^*, \quad \Delta_2 = f_2^*\gamma_{22}^* - f_1^*\gamma_{21}^* + \delta_2^*,$$

où

$$\gamma_{11}^* = p^2 + A_{22}p - a_{22}, \quad \gamma_{12}^* = A_{12}p - a_{12},$$
$$\gamma_{21}^* = A_{21}p - a_{21}, \quad \gamma_{22}^* = p^2 + A_{11}p - a_{11},$$
$$\delta_1^* = x_1(0)\,[(p + A_{11})\,\gamma_{11}^* - A_{21}\gamma_{12}^*] +$$
$$+ x_2(0)\,[A_{12}\gamma_{11}^* - (p + A_{22})\,\gamma_{12}^*] + x_1'(0)\,\gamma_{11}^* - x_2'(0)\,\gamma_{12}^*,$$
$$\delta_2^* = x_1(0)\,[A_{21}\gamma_{22}^* - (p + A_{11})\,\gamma_{21}^*] +$$
$$+ x_2(0)\,[(p + A_{22})\,\gamma_{22}^* - A_{12}\gamma_{21}^*] + x_1'(0)\,\gamma_{21}^* + x_2'(0)\,\gamma_{22}^*.$$

Introduisons les notations:

$$\Gamma_{kn}^* = (-1)^{k+n}\frac{\gamma_{kn}^*}{\Delta}, \quad D_k^* = \frac{\delta_k^*}{\Delta} \quad (k,\ n = 1,\ 2). \tag{2.71}$$

Les formules (2.70) s'écrivent alors

$$x_k^* = f_1^*\Gamma_{k1}^* + f_2^*\Gamma_{k2}^* + D_k^* \quad (k = 1,\ 2). \tag{2.72}$$

Les quantités Γ_{kn}^*, D_k^* $(k,\ n = 1,\ 2)$ sont des fractions rationnelles du paramètre p dont le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, qui est égal à quatre. En décomposant ces fractions en fractions simples, on déduit aussitôt

$$x_k(t) = \int_0^t [f_1(\tau)\,\Gamma_{k1}(t-\tau) + f_2(\tau)\,\Gamma_{k2}(t-\tau)]\,d\tau + D_k(t) \tag{2.73}$$
$$(k = 1,\ 2).$$

3. Il existe des classes d'équations différentielles dont on peut représenter les solutions par des intégrales de Laplace, où la variable indépendante figure sous le signe somme comme paramètre. Considérons l'équation

$$(a_n + b_nt)\,x^{(n)}(t) + (a_{n-1} + b_{n-1}t)\,x^{n-1}(t) + \ldots + (a_0 + b_0t)\,x(t) = 0. \tag{2.74}$$

Soit

$$x(t) = \int e^{pt} v(p)\, dp,$$

l'intervalle d'intégration n'est assujetti à aucune condition pour l'instant. Ceci étant

$$x^{(k)}(t) = \int e^{pt} p^k v(p)\, dp, \quad tx^{(k)}(t) = \int t e^{pt} p^k v(p)\, dp =$$
$$= [e^{pt} p^k v(p)] - \int e^{pt} \frac{d}{dp} [p^k v(p)]\, dp.$$

En portant ces expressions dans (2.74), on obtient

$$\int e^{pt} \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k p^k v(p) - \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{d}{dp} [p^k v(p)] \right\} dp +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} b_k [e^{pt} p^k v(p)] = 0. \tag{2.75}$$

Cette équation est vérifiée si l'accolade de (2.75) s'annule, et on obtient alors une équation différentielle du premier ordre pour la détermination de la fonction $v(p)$. Le second terme doit être égalé à zéro moyennant un choix convenable de l'intervalle d'intégration. Soit

$$tx''(t) + (a + b + t)\, x'(t) + ax(t) = 0.$$

La transformation de Laplace, appliquée à la fonction $x(t) = \int e^{pt}\, v(p)\, dp$, nous donne pour la détermination de $v(p)$ l'équation suivante :

$$v'(p)(p^2 + p) - v(p)[p(a + b - 2) + a - 1] = 0.$$

D'où

$$v(p) = (p + 1)^{b-1} p^{a-1}.$$

Pour l'annulation du second terme de (2.75), on a

$$[e^{pt}(p + 1)^{b-1} p^{a-1} (p^2 + p)]_{\alpha}^{\beta} = 0, \tag{2.76}$$

où α et β sont les extrémités de l'intervalle d'intégration. Pour fixer les idées nous supposerons $a > 0$, $b > 0$. La condition (2.76) est remplie pour $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Donc, la première intégrale de

l'équation (2.74) s'écrit

$$x_1(t) = \int_{-1}^{0} e^{pt}(p+1)^{b-1}p^{a-1}\,dp.$$

En posant $\beta = 0$ et $\alpha = -\infty$, on obtient la seconde intégrale (du moins pour les $t > 0$)

$$x_2 t = \int_{-\infty}^{0} e^{pt}(p+1)^{b-1}p^{a-1}\,dp.$$

Dans de nombreux cas, on est obligé de choisir le chemin d'intégration dans le plan complexe.

Considérons l'équation

$$tx''(t) + 2nx'(t) + tx(t) = 0.$$

Comme précédemment on trouve

$$v(p) = (p^2+1)^{n-1}.$$

La condition

$$[e^{pt}(p^2+1)^n]_\alpha^\beta = 0$$

nous fournit $\alpha = -i$, $\beta = +i$. Donc,

$$x_1(t) = \int_{-i}^{+i} e^{pt}(p^2+1)^{n-1}\,dp.$$

En posant $p = iu$, on obtient

$$x_1(t) = i\int_{-1}^{1} e^{iut}(1-u^2)^{n-1}\,du.$$

Séparons la partie réelle de la partie imaginaire :

$$x_1(t) = i\int_{-1}^{1} \cos ut\,(1-u^2)^{n-1}\,du - \int_{-1}^{1} \sin ut\,(1-u^2)^{n-1}\,du.$$

La seconde intégrale est nulle, puisque l'intégrande est une fonction impaire. On a donc

$$x_1(t) = \int_{-1}^{1} \cos ut\,(1-u^2)^{n-1}\,du.$$

On obtient la deuxième intégrale de l'équation (2.74) en posant $\alpha = -\infty$ et $\beta = +i$ ou $-i$ ($t > 0$). En intégrant de $-\infty$ à 0 et

ensuite de 0 à i, il vient

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{pt}(p^2+1)^{n-1}\,dp + i\int_{0}^{1} e^{iut}(1-u^2)^{n-1}\,du =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{ut}(u^2+1)^{n-1}\,du + i\int_{0}^{1} \cos ut\,(1-u^2)^{n-1}\,du -$$

$$-\int_{0}^{1} \sin ut\,(1-u^2)^{n-1}\,du.$$

La partie imaginaire est donc égale à $\frac{1}{2}x_1(t)$; la partie réelle doit également être solution, i.e.

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{ut}(u^2+1)^{n-1}\,du + \int_{0}^{1} \sin ut\,(1-u^2)^{n-1}\,du.$$

Dans [217] on trouvera de nombreuses questions relatives à ce point.

4. Cette méthode peut être utilisée pour résoudre les équations différentielles aux dérivées partielles en mathématiques appliquées.

Soit donnée l'équation

$$\nabla^2 u + a(x, y, z)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial t} + c(x, y, z)\,u = f(x, y, z, t), \quad (2.77)$$

où $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ est l'*opérateur de Laplace*, (x, y, z) un point d'un certain domaine et t le temps ($t > 0$). La condition aux limites s'écrit

$$\alpha(x, y, z)\,u + \beta(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x, y, z, t), \quad (2.78)$$

où $\frac{\partial u}{\partial n}$ représente la dérivée normale. Par ailleurs, on donne des conditions initiales à l'intérieur du domaine, par exemple

$$\lim_{t\to 0} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z), \quad (2.79)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t) = u_1(x, y, z). \quad (2.80)$$

Multiplions l'équation initiale (2.77) par e^{-pt} et intégrons par rapport à t de 0 à ∞. Supposons que les intégrales

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, y, z, t)\,dt, \quad \int_0^{\infty} e^{-pt}\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t)\,dt, \text{ etc.}$$

existent. De plus,

$$\int_0^\infty e^{-pt}\nabla^2 u\,dt = \nabla^2 \int_0^\infty e^{-pt} u\,dt.$$

Sous les hypothèses faites sur les propriétés de la fonction inconnue $u(x, y, z, t)$, on obtient à partir de (2.77), (2.79), (2.80) l'équation

$$\nabla^2 u^*(p) + [a(x, y, z)p^2 + b(x, y, z)p + c(x, y, z)]\,u^*(p) = \\ = a(x, y, z)\,[pu_0(x, y, z) - u_1(x, y, z)] + \\ + b(x, y, z)\,u_0(x, y, z) + f^*(x, y, z, p). \quad (2.81)$$

La condition aux limites (2.78) se transforme en la suivante:

$$\alpha(x, y, z)\,u^*(p) + \beta(x, y, z)\frac{\partial u^*(p)}{\partial n} = \varphi^*(x, y, z, p). \quad (2.82)$$

Une fois qu'on a déterminé $u^*(p)$ à partir des équations (2.81) et (2.82), le problème consiste à tirer $u(x, y, z, t)$ à partir de l'égalité

$$u^*(x, y, z, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, y, z, t)\,dt.$$

Si $u^*(x, y, z, p)$ figure dans la table des formules, on a la solution aussitôt, sinon on peut l'obtenir à l'aide du théorème d'inversion

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} u^*(x, y, z, \lambda)\,d\lambda.$$

On rappelle (cf. § 1) que pour calculer cette intégrale, on transforme l'intervalle d'intégration en un contour fermé adéquat auquel on applique le théorème des résidus. On remarquera que lorsqu'on forme l'équation auxiliaire et ses conditions aux limites et lorsqu'on déduit la fonction $u(x, y, z, t)$ à partir de $u^*(x, y, z, p)$ à l'aide du théorème d'inversion, on impose certaines hypothèses aux propriétés de la fonction $u(x, y, z, t)$. Les hypothèses telles que la possibilité de permuter d'un côté la transformation de Laplace, et de l'autre, les opérations de différentiation et de passage à la limite, ou encore que la solution doive être de forme déterminée, ou encore qu'elle soit développable en série, etc., ne sont pas restrictives du point de vue physique. Par ailleurs, la méthode de résolution indiquée peut être utilisée formellement si le résultat obtenu vérifie l'équation ainsi que les conditions initiales et aux limites.

Résolvons quelques problèmes concrets.

1°. Considérons l'équation à une dimension de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.83)$$

et supposons que sur l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant l$ est posé le problème aux limites avec les conditions aux limites

$$u|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad u|_{x=l} = \varphi_2(t) \tag{2.84}$$

et la condition initiale homogène

$$u|_{t=0} = 0. \tag{2.85}$$

Remplaçons la fonction $u(x, t)$ par sa transformée de Laplace

$$u^*(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t)\, dt \tag{2.86}$$

qui sera la nouvelle fonction inconnue. En appliquant aux deux membres de (2.83) la transformation de Laplace et en supposant que dans (2.86) il est possible de dériver par rapport à x sous le signe somme, on obtient

$$\frac{d^2u^*(x, p)}{dx^2} = pu^*(x, p). \tag{2.87}$$

Appliquons la transformation de Laplace à l'équation (2.84)

$$u^*|_{x=0} = \varphi_1^*(p), \quad u^*|_{x=l} = \varphi_2^*(p), \tag{2.88}$$

où

$$\varphi_k^*(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \varphi_k(t)\, dt \quad (k = 1, 2).$$

Des équations (2.87) et (2.88) on déduit que

$$u^*(x, p) = \varphi_1^*(p)\, \omega_1^*(x, p) + \varphi_2^*(p)\, \omega_2^*(x, p), \tag{2.89}$$

où

$$\omega_1^*(x, p) = \frac{\operatorname{sh}(l-x)\sqrt{p}}{\operatorname{sh} l\sqrt{p}}, \quad \omega_2^*(x, p) = \frac{\operatorname{sh} x\sqrt{p}}{\operatorname{sh} l\sqrt{p}}.$$

Les fonctions $\omega_1^*(x, p)$ et $\omega_2^*(x, p)$ sont les transformées de Laplace des fonctions

$$-\frac{1}{l}\frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\left[\frac{x}{2l}, \frac{t}{l^2}\right] \text{ et } \frac{1}{l}\frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\left[\frac{l-x}{2l}, \frac{t}{l^2}\right]$$

respectivement, où

$$\vartheta_3(v, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2ni\pi v - n^2\pi^2 t}$$

est la *fonction de Jacobi.* A partir de (2.89) déterminons $u(x, t)$ à l'aide du théorème de convolution

$$u(x, t) = -\frac{1}{l}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\vartheta_3\left(\frac{x}{2l}, \frac{t-\tau}{l^2}\right)\varphi_1(\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{l}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\vartheta_3\left(\frac{l-x}{2l}, \frac{t-\tau}{l^2}\right)\varphi_2(\tau)\,d\tau. \tag{2.90}$$

Considérons maintenant l'équation non homogène

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{2.91}$$

avec les conditions initiale et aux limites homogènes

$$u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = 0. \tag{2.92}$$

Supposons que

$$f^*(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(x, t)\,dt.$$

Appliquons la transformation de Laplace à (2.91) et (2.92)

$$\frac{d^2 u^*}{dx^2} = pu^* - f^*(x, p), \tag{2.93}$$

$$u^*(0, p) = u^*(l, p) = 0. \tag{2.94}$$

Il est immédiat de vérifier que pour l'équation (2.93) avec les conditions aux limites (2.94), la fonction de Green est de la forme

$$\gamma^*(x, \xi; p) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(l-\xi)\sqrt{p}\,\operatorname{sh} x\sqrt{p}}{\sqrt{p}\,\operatorname{sh} l\sqrt{p}} & \text{pour} \quad x \leqslant \xi, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}(l-x)\sqrt{p}\,\operatorname{sh}\xi\sqrt{p}}{\sqrt{p}\,\operatorname{sh} l\sqrt{p}} & \text{pour} \quad x \geqslant \xi, \end{cases}$$

et la solution de l'équation (2.93) vérifiant les conditions (2.94) est de la forme

$$u^*(x, p) = \int_0^l \gamma^*(x, \xi; p) f^*(x, p)\,d\xi. \tag{2.95}$$

La fonction $\gamma^*(x, \xi; p)$ est la transformée de Laplace

$$\gamma(x, \xi; t) = \frac{1}{2l}\left[\vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2l}, \frac{t}{l^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{x+\xi}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)\right].$$

La formule (2.95) entraîne donc

$$u(x, t) = \int_0^t d\xi \int_0^t \gamma(x, \xi; t-\tau) f(\xi, \tau) d\tau. \qquad (2.96)$$

2°. Soit à trouver une fonction satisfaisant à l'équation (2.83) et aux conditions

$$u(x, 0) = 0 \quad (x > 0), \quad u(0, t) = f(t). \qquad (2.97)$$

Comme précédemment, en appliquant la transformation de Laplace à l'équation initiale (2.83) et en tenant compte des conditions (2.97) on obtient

$$\frac{d^2u^*(x, p)}{dx^2} = pu^*(x, p), \quad u^*(0, p) = f^*(p).$$

Mettons $u^*(x, p)$ sous la forme

$$u^*(x, p) = C_1 e^{-x\sqrt{p}} + C_2 e^{x\sqrt{p}}.$$

Comme $u^*(x, p)$ est bornée lorsque $x \to \infty$, il vient

$$u^*(x, p) = f^*(p) e^{-x\sqrt{p}} = pf^*(p) \frac{e^{-x\sqrt{p}}}{p},$$

d'où l'on déduit, moyennant le théorème de convolution

$$u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x}{4\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi.$$

Il est aisé de voir que

$$u(x, 0) = 0, \; u(0, t) = f(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = f(t).$$

3°. Posons le problème suivant pour l'équation de la chaleur (2.83). Supposons que $0 < x < \infty$,

$$u(x, 0) = u_0, \quad u'(0, t) = hu(0, t) \quad (h = \text{const}). \qquad (2.98)$$

La transformation de Laplace ramène l'équation initiale (2.83) et les conditions (2.98) à la forme

$$\frac{d^2u^*}{dx^2} = pu^* - u_0, \quad \left.\frac{du^*}{dx}\right|_{x=0} = hu^*.$$

Comme précédemment, la solution $u^*(x, p)$ étant bornée lorsque $x \to \infty$, il vient

$$u^*(x, p) = \frac{u_0}{p} + ce^{-x\sqrt{p}},$$

$$\left.\frac{du^*}{dx}\right|_{x=0} = -c\sqrt{p} = h\left(\frac{u_0}{p} + c\right) = hu^*(0, p),$$

d'où

$$u^*(x, p) = \frac{u_0}{p}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{p}+h} e^{-x\sqrt{p}}\right) =$$

$$= \frac{u_0}{p}(1 - e^{-x\sqrt{p}}) + \frac{u_0}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+h)} e^{-x\sqrt{p}}.$$

Comme

$$\mathscr{L}\left\{u_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{u_0}{p}(1 - e^{-x\sqrt{p}}),$$

$$\mathscr{L}\{e^{-h(t-x)}\}\ ^{*)} = \frac{1}{p+h} e^{-px} = f^*(p),$$

en se servant de l'expression

$$\frac{f^*(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+h)} e^{-x\sqrt{p}} = \mathscr{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_x^\infty e^{-h(\tau-x)-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau\right),$$

on obtient

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \frac{u_0}{\sqrt{\pi t}} \int_x^\infty e^{-h(\tau-x)-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau.\right.$$

4°. Soit à trouver une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b\frac{\partial u}{\partial t} - cu = 0 \quad (0 < x < \infty,\ t > 0) \tag{2.99}$$

telle que

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = \varphi(t). \tag{2.100}$$

En appliquant la transformation de Laplace, on obtient

$$\frac{d^2u^*}{dx^2} - (ap^2 + bp + c)u^* = 0, \tag{2.101}$$

$$u^*(x, 0) = \varphi^*(p). \tag{2.102}$$

L'équation homogène (2.101) se résout de façon standard. La solution étant bornée lorsque $x \to \infty$, il est immédiat d'établir que la transformée de Laplace de la fonction $u(x, t)$ est la fonction $u^*(x, p) = \varphi^*(p)\, e^{-x\sqrt{ap^2+bp+c}}$. Si $ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$, la fonction

*) L'intégration a lieu entre x et ∞.

$u^*(x, p)$ s'écrit

$$u^*(x, p) = \varphi^*(p)\, e^{-x\left[p\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right]},$$

d'où

$$u(x, t) = e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}x}\, \varphi(t - x\sqrt{a}).$$

Si $\alpha = ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \neq 0$, alors compte tenu de la relation

$$e^{-x\sqrt{ap^2+bp+c}} = e^{-x\frac{b}{2\sqrt{a}}} \cdot e^{-x\sqrt{a}p} -$$

$$-x\sqrt{\frac{\alpha}{a}} \int_{x\sqrt{a}}^{\infty} e^{-pt} e^{-\frac{b}{2a}t} \frac{J_1\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\sqrt{t^2-ax^2}\right)}{\sqrt{t^2-ax^2}}\, dt,$$

on aura

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 \text{ lorsque } 0 \leqslant t < x\sqrt{a}, \\ e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}x}\, \varphi(t - x\sqrt{a}) - \\ \quad -x\sqrt{\frac{\alpha}{a}} \int_{x\sqrt{a}}^{t} \varphi(t-\tau)\, e^{-\frac{b}{2a}\tau} \frac{J_1\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\sqrt{\tau^2-ax^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-ax^2}}\, d\tau \\ \text{lorsque } t \geqslant x\sqrt{a}. \end{cases}$$

5. Considérons l'*équation de Volterra de deuxième espèce*

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau \tag{2.103}$$

que l'on rencontre dans diverses branches scientifiques. Supposons que toutes les fonctions figurant dans cette équation admettent pour transformées de Laplace respectivement:

$$\varphi^*(p) = \mathcal{L}[\varphi(t)], \quad f^*(p) = \mathcal{L}[f(t)], \quad k^*(p) = \mathcal{L}[k(t)].$$

En utilisant la convolution, on a

$$\varphi^*(p) = f^*(p) + k^*(p)\, \varphi^*(p),$$

d'où

$$\varphi^*(p) = \frac{f^*(p)}{1-k^*(p)}$$

et

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \varphi^*(p)\, e^{pt}\, dp.$$

S'agissant de l'équation (2.103), tous les noyaux itérés dépendent de la différence $t - \tau$, donc la résolvante dépendra également de la différence $t - \tau$.

L'*équation de Volterra de première espèce*

$$f(t) = \int_0^t k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

se résout de façon analogue.' Cette méthode est valable aussi pour les systèmes d'équations intégrales de Volterra de la forme

$$\varphi_i(t) = f_i(t) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t K_{ik}(t-\tau)\,\varphi_k(\tau)\,d\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de ces équations, on obtient

$$\varphi_i^*(p) = f_i^*(p) + \sum_{k=1}^{n} K_{ik}^*(p)\,\varphi_k^*(p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La résolution de ce système d'équations du premier degré nous donne $\varphi_i^*(p)$, et la solution du système d'équations s'écrit

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \varphi_i^*(p)\,e^{pt}\,dp.$$

Citons quelques exemples.

1°. *Equation d'Abel.* En étudiant le *problème de la tautochrone*

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = f(t) \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{2.104}$$

Abel fut le premier, en 1826, à obtenir une équation dans laquelle la fonction inconnue $\varphi(t)$ figurait sous le signe d'intégration.

Supposons que $\varphi^*(p) = \mathscr{L}[\varphi(t)]$, $\mathscr{L}[f(t)] = f^*(p)$. Moyennant la transformation de Laplace, on ramène l'équation (2.104) à la forme

$$\Gamma(1-\alpha)\frac{\varphi^*(p)}{p^{1-\alpha}} = f^*(p).$$

D'où

$$\varphi^*(p) = \frac{p^{1-\alpha} f^*(p)}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{p^\alpha} + \frac{pf^*(p) - f(0)}{\Gamma(1-\alpha)\,p^\alpha}.$$

Il est aisé de trouver

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha)}\left[\frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right].$$

Comme $\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$, il vient

$$\varphi(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{t^{1-\alpha}}+\int_0^t \frac{f'(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right].$$

2°. **Considérons l'équation intégrale à noyau logarithmique**

$$\int_0^t \varphi(\tau)\ln(t-\tau)\,d\tau=f(t), \qquad (2.105)$$

où $\varphi(\tau)$ est la fonction inconnue. Supposons que $\varphi^*(p)=\mathcal{L}[\varphi(t)]$, $f^*(p)=\mathcal{L}[f(t)]$. Utilisons l'égalité

$$\mathcal{L}\left(\int_0^\infty \frac{t^k e^{-ak}}{\Gamma(k+1)}\,dk\right)=\frac{1}{p(\ln p+a)}. \qquad (2.106)$$

Sachant que

$\mathcal{L}(\ln t)=-\frac{1}{p}(C+\ln p)$, où C est la constante d'Euler, on obtient

$$-\varphi^*(p)\frac{1}{p}(C+\ln p)=f^*(p).$$

Donc

$$\varphi^*(p)=-\frac{pf^*(p)}{\ln p+C}=-\frac{p^2f^*(p)-f'(0)}{p(\ln p+C)}-\frac{f'(0)}{p(\ln p+C)}.$$

Compte tenu de (2.106), il vient

$$\varphi(t)=-\int_0^t f''(\tau)\,d\tau\int_0^\infty \frac{(t-\tau)^k e^{-Ck}}{\Gamma(k+1)}\,dk-f'(0)\int_0^\infty \frac{t^k e^{-Ck}}{\Gamma(k+1)}\,dk.$$

3°. Considérons l'équation

$$\sin t=\int_0^t J_0(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Si on lui applique la transformation de Laplace, on obtient

$$\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\varphi^*(p),\quad \varphi^*(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}},\quad \varphi(t)=J_0(t).$$

La dernière formule entraîne

$$\sin t=\int_0^t J_0(t-\tau)\,J_0(\tau)\,d\tau.$$

A noter que ce qui vient d'être dit se généralise aussitôt à toute équation intégro-différentielle de la forme

$$a_0\varphi^{(n)}(t)+a_1\varphi^{(n-1)}(t)+\ldots+a_n\varphi(t)+$$
$$+\sum_{j=0}^{n}\int_0^t K_{n-j}(t-\tau)\,\varphi^{(j)}(\tau)\,d\tau=f(t)$$

et aux systèmes de telles équations.

§ 7. Transformation de Mellin

La *transformation de Mellin*

$$\mathcal{F}(s)=\int_0^\infty f(t)\,t^{s-1}\,dt,\qquad s=\sigma+i\tau, \tag{2.107}$$

est étroitement liée aux transformations de Fourier et de Laplace.

La transformation de Mellin peut être appliquée avec succès à la résolution d'une classe de problèmes harmoniques plans dans un domaine aréolaire, à des problèmes de la théorie de l'élasticité, ainsi qu'à l'étude des fonctions spéciales, à la sommation des séries et au calcul des intégrales. Les théorèmes relatifs à la transformation de Mellin se déduisent des théorèmes correspondants des transformations de Fourier et de Laplace moyennant un changement de variables. Citons quelques uns d'entre eux.

Théorème 16. *Supposons que* $\tau^{\sigma-1}f(\tau)\in L]0,+\infty[$, *où la fonction* $f(\tau)$ *est à variation bornée au voisinage du point* $\tau=t$. *Alors*

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda}\mathcal{F}(s)\,t^{-s}\,ds, \tag{2.108}$$

où la fonction $\mathcal{F}(s)$ *est définie par* (2.107).

Théorème 17. *Supposons que* $\mathcal{F}(\sigma+iu)\in L]-\infty,+\infty[$ *et qu'elle est à variation bornée au voisinage du point* $u=t$. *Alors*

$$\frac{1}{2}[\mathcal{F}(\sigma+i(t+0))+\mathcal{F}(\sigma+i(t-0))]=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\lambda} f(t)\,t^{\sigma+it-1}\,dt, \tag{2.109}$$

où

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathcal{F}(s)\,t^{-s}\,ds. \tag{2.110}$$

Supposons que $\mathscr{F}(s)$ et $G(s)$ sont les transformées de Mellin des fonctions $f(t)$ et $g(t)$. Il vient aussitôt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathscr{F}(s)\,G(1-s)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}G(1-s)\,ds\int_0^{\infty}f(t)\,t^{s-1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}f(t)\,dt\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}G(1-s)\,t^{s-1}\,ds=\int_0^{\infty}f(t)\,g(t)\,dt. \qquad (2.111)$$

De façon analogue

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathscr{F}(s)\,G(s)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}g(t)\,dt\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathscr{F}(s)\,t^{s-1}\,ds=$$

$$=\int_0^{\infty}g(t)\,f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}. \qquad (2.112)$$

Théorème 18. *Supposons que*

$$t^{k-1}f(t)\in L]0,\ +\infty[\ \text{ et }\ G(1-k-ix)\in L]-\infty,\ +\infty[,$$

ou que

$$\mathscr{F}(k+ix)\in L]-\infty,\ +\infty[\ \text{ et }\ t^kg(t)\in L]0,\ +\infty[.$$

La formule (2.111) *est alors valable.*

L'analogue du théorème de convolution est le

Théorème 19. *Supposons que $t^kf(t)$ et $t^kg(t)$ appartiennent à l'ensemble $L\,]0,\ +\infty[$ et soit*

$$h(t)=\int_0^{\infty}f(\tau)\,g\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Alors la fonction $t^kh(t)\in L\,]0,\ +\infty[$ et sa transformée de Mellin est la fonction $\mathscr{F}(s)\,G(s)$.

Pour la transformation de Mellin appliquée à d'autres classes de fonctions et certaines de ses applications, voir [238], [180].

Bibliographie du chapitre II

[246], [50], [36], [35], [120], [132], [146], [148], [202], [219], [78], [64], [57], [58], [59], [161], [185], [251], [254].

CHAPITRE III

TRANSFORMATION DE BESSEL

On appelle *transformation de Bessel* une transformation intégrale de la forme

$$f^*(\lambda)=\int_0^\infty f(t)\,K(\lambda t)\,dt,$$

où $K(z)$ est une fonction de Bessel.

Les transformations de Hankel, Meijer, Kontorovitch-Lébédev, etc. sont des transformations de Bessel.

§ 1. Transformation de Hankel

Les formules du type (1.14), (1.15), (1.16) qui développent une fonction arbitraire $f(t)$ en intégrale de Fourier présentent un intérêt notable dans nombre de problèmes de mathématiques et de physique. Parmi ces développements, mentionnons le développement suivant des fonctions cylindriques, connu sous le nom d'intégrale de Fourier-Bessel :

$$f(x)=\int_0^\infty J_\nu(xu)\,u\,du\int_0^\infty f(t)\,J_\nu(ut)\,t\,dt \quad (0<x<+\infty), \quad (3.1)$$

où $J_\nu(x)$ est une fonction de Bessel,

$$\nu>-\frac{1}{2}.$$

Théorème 1. *Soit une fonction $f(x)$ à variation bornée sur tout intervalle fini* $]0, R[$ *et*

$$\int_0^\infty |f(x)|\,x^{\frac{1}{2}}\,dx<\infty.$$

Si $\nu > -\frac{1}{2}$, *on a*

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \int_0^\infty J_\nu(xu)\, u\, du \int_0^\infty f(t)\, J_\nu(ut)\, t\, dt. \quad (3.2)$$

Aux points de continuité, on a la formule (3.1).

La validité de ce développement est démontrée sous d'autres hypothèses dans [238], [70], [42].

On appelle *transformation de Hankel* l'intégrale

$$f_\nu^*(u) = \mathcal{H}_\nu[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, tJ_\nu(ut)\, dt \quad (0 < u < +\infty). \quad (3.3)$$

Le développement (3.1) entraîne la formule d'inversion

$$f(t) = \mathcal{H}_\nu^{-1}[f_\nu^*(u)] = \int_0^\infty f_\nu^*(u)\, J_\nu(ut)\, u\, du \quad (0 < t < +\infty). \quad (3.4)$$

Observons que si la fonction $f(t)$ est telle que $f(t) = O(t^\alpha)$ lorsque $t \to 0$, $\alpha + \nu + 2 > 0$ et $f(t) = O(t^\beta)$ lorsque $t \to \infty$, $\beta + \frac{3}{2} < 0$, alors l'intégrale (3.3) est convergente [42].

Il existe un développement analogue à (3.1), soit

$$f(x) = \int_0^\infty \mathbf{H}_\nu(xu)\,(xu)^{\frac{1}{2}}\, du \int_0^\infty Y_\nu(ut)\,(ut)^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt, \quad (3.5)$$

où Y_ν est une *fonction de Bessel du deuxième ordre*, $\mathbf{H}_\nu$ une *fonction de Struve*.

La formule (3.5) sert de base à l'introduction de la transformation intégrale correspondante [222], [238], [235], [85].

Citons le lien existant entre la transformation de Hankel et les transformations multiples de Fourier.

Soient

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x + i\omega y} f^*(\lambda, \omega)\, d\lambda\, d\omega,$$

$$f^*(\lambda, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\lambda - iy\omega} f(x, y)\, dx\, dy.$$

En passant aux coordonnées polaires moyennant les formules $x + iy = re^{i\varphi}$ et $\lambda + i\omega = \rho e^{i\psi}$ on établit que les fonctions $f(x, y)$

et $f^*(\lambda, \omega)$ sont liées entre elles par la relation

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\rho=0}^{\infty} \int\limits_{\psi=0}^{2\pi} e^{ir\rho\cos(\psi-\varphi)} v(\rho, \psi)\, \rho\, d\rho\, d\psi.$$

Posant

$$v(\rho, \psi) = i^{-n} \chi(\rho)\, e^{in\psi}$$

et comme

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{iz\cos\theta + in\theta}\, d\theta,$$

on aura

$$u(r, \varphi) = e^{in\varphi} \int\limits_0^{\infty} \rho J_n(r\rho)\, \chi(\rho)\, d\rho.$$

Posant

$$u(r, \varphi) = \Phi(r)\, e^{in\varphi},$$

où

$$\Phi(r) = \int\limits_0^{\infty} \rho J_n(r\rho)\, \chi(\rho)\, d\rho,$$

on aura

$$v(\rho, \psi) = i^n e^{in\psi} \int\limits_0^{\infty} J_n(-r\rho)\, \Phi(r)\, r\, dr,$$

$$\chi(\rho) = \int\limits_0^{\infty} J_n(r\rho)\, \Phi(r)\, r\, dr.$$

Enonçons encore quelques propriétés de la transformation de Hankel.

1°. $\mathcal{H}_\nu[f(at)] = \frac{1}{a^2} f_\nu^*\left(\frac{u}{a}\right)$.

2°. Une intégration par parties donne

$$\mathcal{H}_\nu\left[\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{df}{dt} - \frac{\nu^2}{t^2} f\right] = -u^2 \mathcal{H}_\nu[f(t)].$$

Ceci étant, on admet que

$$\left.\begin{aligned} t^{\nu+1}\frac{df}{dt} &= 0, \\ t^\nu f(t) &= 0 \end{aligned}\right\} (t \to 0), \qquad \left.\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}}\frac{df}{dt} &= 0, \\ t^{\frac{1}{2}} f(t) &= 0 \end{aligned}\right\} (t \to \infty).$$

3°. *Egalité de Parseval.* Soit

$$\mathcal{H}_\nu [f(t)] = f_\nu^*(u), \qquad \mathcal{H}_\nu]g(t)] = g_\nu^*(u).$$

Alors

$$\int_0^\infty u f_\nu^*(u)\, g_\nu^*(u)\, du = \int_0^\infty t f(t)\, g(t) dt \qquad \left(\nu > -\frac{1}{2}\right).$$

Les conditions de validité de la dernière formule sont énoncées dans [238], [42].

4°. *Asymptotique* [42]. Si $f(t) = O(t^\alpha)$ lorsque $t \to 0$, $\alpha + \nu + 2 > 0$, $f(t) = O(t^\beta)$ lorsque $t \to \infty$, $\beta + \frac{3}{2} < 0$, alors $f_\nu^*(u)$ $(\nu > -1,\ u > 0)$ existe et, d'autre part,

$$f_\nu^*(u) = O(u^{\alpha'}) \quad (u \to 0),\ \alpha' \geqslant \min(\nu,\ -\beta - 2),$$

$$f_\nu^*(u) = O(u^{\beta'}) \quad (u \to \infty),\ \beta' \leqslant \max\left(-\frac{1}{2},\ -\alpha - 2\right).$$

La formule

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\varphi_u(t)\, u\, du}{J_\nu^2(au) + Y_\nu^2(au)} \int_a^\infty f(\tau)\, \varphi_u(\tau)\, \tau\, d\tau \qquad (a < t < +\infty), \tag{3.6}$$

où

$$\varphi_\nu(t) = J_\nu(au)\, Y_\nu(ut) - Y_\nu(au)\, J_\nu(ut) \qquad \left(\nu > -\frac{1}{2}\right)$$

est une combinaison linéaire de fonction de Bessel de première et de seconde espèce d'ordre ν qui généralise le développement (3.1). Le développement (3.6) a lieu si la fonction $f(t)$ est continue par morceaux et à variation bornée sur tout intervalle fini $]a, R[$ et l'intégrale

$$\int_a^\infty |f(t)|\, t^{\frac{1}{2}}\, dt < \infty.$$

Lorsque $a \to 0$, la formule (3.6) se change en (3.1).

Comme dans le cas de la transformation de Hankel, le développement intégral (3.6) conduit à une transformation intégrale que l'on appelle *transformation de Weber*. Il y a intérêt à considérer la transformation généralisée de Weber

$$f^*(u) = \int_a^\infty t C_\nu(ut,\ au)\, f(t)\, dt,$$

où

$$C_\nu(z,\ w) = J_\nu(z)\, [PY_\nu(w) - QwY_{\nu+1}(w)] - \\ - Y_\nu(z)\, [PJ_\nu(w) - QwJ_{\nu+1}(w)],$$

et P et Q sont des constantes arbitraires [86]. Les transformations de Hankel et Weber peuvent être utilisées avec succès pour résoudre les problèmes aux limites posés pour l'équation de Laplace et de Helmholtz et certains problèmes de la théorie de l'élasticité et de la chaleur.

§ 2. Transformation de Meijer

La *transformation intégrale de Meijer* joue un rôle important dans la résolution des équations différentielles de type Bessel. Elle est définie par la formule

$$\tilde{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty K_\nu(st)\,(st)^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt, \tag{3.7}$$

où $K_\nu(t)$ est une *fonction de Mac Donald.* La formule d'inversion s'écrit

$$f(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} I_\nu(ts)\,(ts)^{\frac{1}{2}} \tilde{f}(s)\,ds. \tag{3.8}$$

Les égalités (3.7), (3.8) découlent immédiatement du développement correspondant d'une fonction arbitraire en intégrale de Fourier généralisée.

Théorème 2. *Soit $f(t)$ une fonction de la variable réelle t, $0 \leqslant t < +\infty$, intégrable sur tout intervalle fini $0 < T_1 \leqslant t \leqslant T_2$ et à variation bornée au voisinage du point $t = x$; supposons par ailleurs que l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} |f(t)|\,dt, \quad \beta > \alpha \geqslant 0$$

est convergente.

Sous ces conditions on a le développement

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi i} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} I_\nu(xs)\,(xs)^{\frac{1}{2}} ds \int_0^\infty K_\nu(st)\,(st)^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt. \tag{3.9}$$

La fonction $K_\nu(z)$, on le sait, est une fonction paire de ν, donc la dernière formule peut encore s'écrire

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} \{I_\nu(xs) + I_{-\nu}(xs)\}\,(xs)^{\frac{1}{2}} ds \times$$

$$\times \int_0^\infty K_\nu(st)\,(st)^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt. \tag{3.10}$$

En particulier, puisque

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} z, \quad I_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} z,$$

$$K_{\pm\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z},$$

il s'ensuit que lorsque $\nu = \pm\frac{1}{2}$ la formule (3.10) s'écrit

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} e^{xs}\, ds \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{3.11}$$

T h é o r è m e 3. *Supposons qu'une fonction* $\tilde{f}(s)$, *analytique dans le demi-plan* $\operatorname{Re} s > a \geqslant 0$, *vérifie les conditions*:

1°. *Pour tous les* $t \geqslant 0$ *et* $\beta > \alpha$ *existe*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} I_\nu(tz)(tz)^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}(z)\, dz,$$

où $-\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re} \nu \leqslant \frac{1}{2}$,
la convergence étant uniforme en t $(0 \leqslant t \leqslant b)$.

2°. *L'intégrale*

$$\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{|\tilde{f}(z)|}{|z|} |dz|$$

est convergente.

3°. *La fonction* $\tilde{f}(s)$ *est bornée dans le demi-plan* $\operatorname{Re} s \geqslant \beta$, *i.e.*

$$|\tilde{f}(s)| < A,$$

où A *est une constante positive ne dépendant pas de* s.

4°. *Existe*

$$\lim_{x\to\infty} \tilde{f}(x+iy) = 0,$$

où la convergence est uniforme en toutes les valeurs réelles de y.

Sous ces conditions, lorsque $\operatorname{Re} s > \beta$, *on a l'égalité* (3.7), *où la fonction* $f(t)$ *est définie par* (3.8).

T h é o r è m e 4. *Soit une fonction* $\tilde{g}(s)$ *telle que*

$$\tilde{g}(s) = \tilde{f}(s) + \sum_{i=1}^{n} c_i s^{\theta_i},$$

où $\tilde{f}(s)$ *remplit les conditions du théorème précédent,* Re $(\theta_i) < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. *Alors*

$$\tilde{g}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty K_\nu(st)(st)^{\frac{1}{2}} g(t)\, dt, \quad \operatorname{Re} s > \beta,$$

où

$$g(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta - i\lambda}^{\beta + i\lambda} I_\nu(ts)(ts)^{\frac{1}{2}} \tilde{g}(s)\, ds.$$

La convolution et le calcul opérationnel ont été construits pour la transformation de Meijer d'après le schéma de Mikusinski (cf. chapitre V, § 16).

§ 3. Transformation de Kontorovitch-Lébédev

1. Les transformations intégrales dans lesquelles l'intégration s'effectue sur l'ordre des fonctions de Bessel jouent un rôle très important dans la résolution de certains problèmes de physique mathématique. Cette forme de transformations intégrales a été étudiée pour la première fois par Kontorovitch et Lébédev en 1938 [120]. Elle porte aujourd'hui le nom de transformation de Kontorovitch-Lébédev. Elle a été appliquée avec succès à la résolution de nombreux problèmes intéressants [87], [134], [179], [180]. Dans les transformations de Kontorovitch-Lébédev, le développement de type intégrale de Fourier

$$xf(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty K_{i\tau}(x)\, \tau \operatorname{sh} \pi\tau\, d\tau \int_0^\infty K_{i\tau}(\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{3.12}$$

où $K_\mu(x)$ est une *fonction de Mac Donald*, $x > 0$, $f(x)$ une fonction arbitraire continue avec sa dérivée et telle que $x^2 f(x)$, $xf(x) \in L\,]0, +\infty[$ joue un rôle fondamental. Le développement (3.12) est valable pour des fonctions appartenant à une classe plus large [134], [137]. Soit

$$F(\tau) = \int_0^\infty f(x) K_{i\tau}(x)\, dx. \tag{3.13}$$

L'intégrale (3.13) définit la *transformation de Kontorovitch-Lébédev.* De (3.12) il vient immédiatement la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^\infty K_{i\tau}(x)\, \tau \operatorname{sh} \pi\tau F(\tau)\, d\tau \quad (x > 0). \tag{3.14}$$

Sous une forme plus symétrique, (3.13) et (3.14) s'écrivent

$$F(\tau)=\int_0^{\infty} f(x)\frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}\,dx \quad (0\leqslant\tau<+\infty), \tag{3.15}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty} F(\tau)\frac{2\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}{\pi^2}\frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}\,d\tau \quad (0<x<+\infty). \tag{3.16}$$

Quelquefois (3.13) et (3.14) se rencontrent sous la forme suivante :

$$F(\tau)=\frac{2}{\pi^2}\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\int_0^{\infty} f(x)\frac{K_{i\tau}(x)}{x}\,dx, \tag{3.17}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty} F(\tau)K_{i\tau}(x)\,d\tau. \tag{3.18}$$

Les formules analogues aux formules de Parseval de la théorie des séries et des intégrales de Fourier sont très utiles au calcul de certaines types d'intégrales définies. Enonçons deux théorèmes [35], [136].

Théorème 5. *Soit $g(x)$ une fonction réelle arbitraire telle que*

1) $g(x)x^{-\frac{3}{4}}\in L]0,\ +\infty[$, 2) $g(x)\in L_2]0,\ +\infty[$,

$$G(\tau)=\int_0^{\infty} g(x)\frac{\sqrt{2\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}}{\pi}\frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}\,dx. \tag{3.19}$$

Alors

$$\int_0^{\infty}[G(\tau)]^2\,d\tau=\int_0^{\infty}[g(x)]^2\,dx. \tag{3.20}$$

Théorème 6. *Soient $g_1(x)$ et $g_2(x)$ des fonctions réelles arbitraires, vérifiant les conditions* 1) *et* 2) *du théorème précédent, $G_1(\tau)$ et $G_2(\tau)$ les images respectivement de g_1 et g_2 par la transformation* (3.19).

Alors

$$\int_0^{\infty} G_1(\tau)G_2(\tau)\,d\tau=\int_0^{\infty} g_1(x)g_2(x)\,dx. \tag{3.21}$$

D'autres transformations intégrales dans lesquelles l'intégration s'effectue sur l'ordre des fonctions cylindriques sont considérées dans [117].

2. Trouver la solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right), \tag{3.22}$$

qui vérifie les conditions

$$\left.\begin{array}{ll} T = \vartheta e^{i\omega t} & \text{lorsque } \varphi = 0, \\ T = 0 & \text{lorsque } \varphi = \alpha. \end{array}\right\} \tag{3.23}$$

Ce problème se pose lorsqu'on étudie un champ de températures périodique dans un domaine cunéiforme [184]. On cherchera la solution sous la forme du produit

$$T = \vartheta e^{i\omega t} u(r, \varphi).$$

Pour la détermination de $u(r, \varphi)$, on a l'équation

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad k^2 = -i\frac{\omega}{a}.$$

Moyennant le changement de variables

$$z = ikr, \quad u(r, \varphi) = V(z, \varphi),$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{z^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} - V = 0,$$

$$V = 1 \text{ lorsque } \varphi = 0,$$

$$V = 0 \text{ lorsque } \varphi = \alpha.$$

En appliquant la transformation de Kontorovitch-Lébédev (3.17), (3.18), il vient

$$V(z, \varphi) = e^{-z\sin\varphi} + \int_0^\infty A(s)\,\mathrm{sh}(\varphi s)\,K_{is}(z)\,ds.$$

Les conditions aux limites entraînent

$$\int_0^\infty A(s)\,\mathrm{sh}(\alpha s)\,K_{is}(z)\,ds = -e^{-z\sin\alpha}. \tag{3.24}$$

Pour tous les β réels, on a

$$\int_0^\infty \cos(\beta s)\,K_{is}(z)\,ds = \frac{\pi}{2}e^{-z\,\mathrm{ch}\,\beta}. \tag{3.25}$$

La formule asymptotique pour de grands s

$$|K_{is}(\rho e^{i\gamma})| \sim \sqrt{\frac{\pi}{2s}}\,e^{-\left(\frac{\pi}{2}-|\gamma|\right)s}$$

entraîne aussitôt que l'intégrale de (3.25) converge pour les valeurs imaginaires de $\beta = i\mu$, pourvu que $|\mu| + |\gamma| < \frac{\pi}{2}$. En vertu de (3.24) et (3.25), il vient

$$A(s) = -\frac{2\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)s}{\pi\operatorname{ch}\alpha s}.$$

Donc

$$V(z,\varphi) = e^{-z\sin\varphi} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\varphi s}{\operatorname{sh}\alpha s}\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sK_{is}(z)\,ds \quad \left(\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}\right).$$

Bibliographie du chapitre III

[121], [134], [138], [238], [180], [42], [70], [117], [163], [184].

CHAPITRE IV

AUTRES TRANSFORMATIONS INTÉGRALES

§ 1. Transformation de Mehler-Fock

1. La transformation intégrale de Mehler-Fock est définie par

$$F(\tau)=\int_1^\infty f(x)\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,dx,\qquad \tau\geqslant 0,\tag{4.1}$$

où $P_\nu(x)$ est une *fonction sphérique de Legendre de première espèce*. Soit $f(x)$ une fonction réelle telle que $f(x)\,P_{-\frac{1}{2}}(x)\in L\,]1,+\infty[$. Alors l'intégrale (4.1) prise au sens de Lebesgue est une fonction réelle de τ, définie pour toutes les valeurs de $\tau\geqslant 0$ (on peut également considérer les $\tau<0$ avec $F(-\tau)=F(\tau)$). On calcule formellement les transformées de Mehler-Fock de fonctions quelconques à l'aide des représentations intégrales de fonctions de Legendre, par exemple

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^\alpha \frac{\cos\tau s}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)}}\,ds\quad(\alpha\geqslant 0)$$

(*intégrale de Mehler*),

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{2}{\pi}\operatorname{ch}\pi\tau\int_0^\infty \frac{\cos\tau s}{\sqrt{2(\operatorname{ch}s+\operatorname{ch}\alpha)}}\,ds\quad(\alpha\geqslant 0),$$

et en modifiant ensuite l'ordre d'intégration. Le développement d'une fonction arbitraire en intégrale de Fourier

$$f(x)=\int_0^\infty \tau\operatorname{th}\pi\tau\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,d\tau\int_1^\infty f(\xi)\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\,d\xi\tag{4.2}$$

permet de trouver la formule d'inversion de la transformation (4.1). Formulons deux théorèmes [73].

Théorème 1. *Si une fonction* $\psi(x)$, *définie sur l'intervalle* $[1, +\infty[$ *est telle que* $\varphi(t) = 2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}\,\psi(\mathrm{ch}\,t)$ *possède une dérivée première absolument intégrable sur l'intervalle infini* $[0, +\infty[$, *et une dérivée seconde absolument intégrable sur tout intervalle fini, et si* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(+\infty) = 0$, *alors* $\psi(x)$ *peut être représentée par l'intégrale*

$$\psi(x) = \int_0^\infty P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x)\, f(\mu)\, d\mu \quad (1 \leqslant x < +\infty), \tag{4.3}$$

où

$$f(\mu) = \mu\,\mathrm{th}\,\mu\pi \int_1^\infty P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x)\,\psi(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Théorème 2. *Si une fonction* $f(\mu)$, *absolument intégrable sur l'intervalle infini* $[0, +\infty[$, *possède une dérivée absolument intégrable sur tout intervalle fini, et si* $f(0) = 0$, *alors* $f(\mu)$ *peut être représentée par l'intégrale* (4.4), *où* $\psi(x)$ *est de la forme* (4.3).

Ces théorèmes peuvent être démontrés moyennant d'autres hypothèses [134].

Envisageons maintenant la transformation généralisée de Mehler-Fock:

$$\psi(x) = \int_0^\infty P^k_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x)\, f(\mu)\, d\mu \quad (1 \leqslant x < +\infty), \tag{4.5}$$

$$f(\mu) = \frac{\mu}{\pi}\,\mathrm{sh}(\pi\mu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + i\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - k - i\mu\right) \times \\ \times \int_1^\infty P^k_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x)\,\psi(x)\,dx. \tag{4.6}$$

En posant $k = 0$ dans les formules (4.5), (4.6), on obtient (4.3), (4.4). En se servant des formules

$$P^k_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\mathrm{ch}\,\alpha) = (2\pi\,\mathrm{sh}\,\alpha)^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\{ e^{-i\alpha\mu} \frac{\Gamma(-i\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k - i\mu\right)}\, {}_2F_1\left[\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} - k; 1 + i\mu; -\frac{1}{2} e^{-\alpha} \times \right.\right. \\ \left. \times\,\mathrm{csch}\,\alpha\right] + e^{i\alpha\mu} \frac{\Gamma(i\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + i\mu\right)} \times \\ \left. \times\, {}_2F_1\left[\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} - k; 1 - i\mu; -\frac{1}{2} e^{-\alpha}\,\mathrm{csch}\,\alpha\right]\right\},$$

on déduit

$$\left.\begin{aligned} P^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch}\alpha) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{sh}\alpha)^{-\frac{1}{2}}\cos(\alpha\mu), \\ P^{-\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch}\alpha) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{sh}\alpha)^{-\frac{1}{2}}\sin(\alpha\mu). \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Si dans (4.5), (4.6) on pose $k = \frac{1}{2}$, $x = \operatorname{ch}\alpha$ et l'on tient compte de (4.7), on obtient

$$(\operatorname{sh}\alpha)^{\frac{1}{2}}\psi(\operatorname{ch}\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty f(\mu)\cos(\alpha\mu)\,d\mu, \tag{4.8}$$

$$f(\mu) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \psi(\operatorname{ch}\alpha)(\operatorname{sh}\alpha)^{\frac{1}{2}}\cos(\mu\alpha)\,d\alpha, \tag{4.9}$$

et de façon analogue pour $k = -\frac{1}{2}$

$$(\operatorname{sh}\alpha)^{\frac{1}{2}}\psi(\operatorname{ch}\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{f(\mu)}{\mu}\sin(\alpha\mu)\,d\mu, \tag{4.10}$$

$$\frac{f(\mu)}{\mu} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \psi(\operatorname{ch}\alpha)(\operatorname{sh}\alpha)^{\frac{1}{2}}\sin(\mu\alpha)\,d\alpha. \tag{4.11}$$

2. La transformation intégrale de Mehler-Fock est utilisée pour résoudre certains problèmes de la théorie du potentiel, de la théorie de la chaleur, certaines équations intégrales linéaires ainsi que des problèmes de physique mathématique [134], [136]. Considérons à titre d'exemple l'équation intégrale

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda\int_1^\infty \frac{\varphi(s)}{x+s}\,ds, \tag{4.12}$$

où

$$1 \leqslant x < +\infty, \quad -\infty < \lambda\pi < 1.$$

Supposons qu'existent les transformées de Mehler-Fock des fonctions $\varphi(x)$ et $g(x)$

$$\Phi(\tau) = \int_1^\infty \varphi(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,dx,$$

$$G(\tau) = \int_1^\infty g(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,dx.$$

Comme

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi}\int_1^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(s)}{x+s}\,ds,$$

après multiplication de (4.12) par $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$ et intégration sur x de 1 à $+\infty$, on obtient

$$\Phi(\tau)=G(\tau)+\frac{\lambda\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau}\Phi(\tau),$$

d'où il vient pour $-\infty<\lambda\pi<1$

$$\Phi(\tau)=\frac{G(\tau)}{1-\frac{\lambda\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau}}.$$

La formule d'inversion donne

$$\varphi(x)=\int_0^\infty \tau\operatorname{th}\pi\tau\frac{G(\tau)}{1-\frac{\lambda\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,d\tau.$$

On peut donner une justification rigoureuse en supposant par exemple que $g(x)$ est une fonction continue à variation bornée sur tout intervalle fini $]1, b[$, et de plus que

1) $g(x)P_{-\frac{1}{2}}(x)\in L\ ]1, +\infty[$,

2) $G(\tau)\tau\in L\ ]0, +\infty[$ [134].

§ 2. Transformation de Hilbert

Considérons la formule intégrale de Fourier

$$f(x)=\int_0^\infty [a(t)\cos xt+b(t)\sin xt]\,dt.$$

Ici

$$a(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos ut\,du,\qquad b(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(u)\sin ut\,du.$$

Posons

$$g(x)=\int_0^\infty [b(t)\cos xt-a(t)\sin xt]\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt\int_{-\infty}^\infty \sin(u-x)t\cdot f(u)\,du.$$

L'intégrale de second membre de la dernière égalité est appelée *intégrale conjuguée* de l'intégrale de Fourier et se déduit formellement de la formule de Fourier par changement de a en b et b en $-a$. On aura toujours formellement

$$g(x)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^l dt\int_{-\infty}^{\infty}\sin(u-x)\,t\cdot f(u)\,du=$$

$$=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos l(u-x)}{u-x}f(u)\,du=$$

$$=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos lt}{t}[f(x+t)-f(x-t)]\,dt.$$

D'où

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt. \tag{4.13}$$

De façon analogue,

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{g(x+t)-g(x-t)}{t}\,dt. \tag{4.14}$$

Les formules (4.13), (4.14) sont équivalentes aux formules

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\,\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}\,dt=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt, \tag{4.15}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\,\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{t-x}\,dt=-\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{g(x+t)-g(x-t)}{t}\,dt, \tag{4.16}$$

où V.P. signifie que l'intégrale est prise dans sa valeur principale au sens de Cauchy. Les deux dernières formules représentent un couple de transformations de Hilbert. Dans [238], [254] on trouvera des démonstrations rigoureuses de nombreux théorèmes se rattachant aux transformations de Hilbert.

§ 3. Transformation de Laguerre

La transformation intégrale

$$T\{f(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-t}L_n(t)\,f(t)\,dt=f^*(n)\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4.17}$$

où $L_n(t)$ sont les *polynômes de Laguerre d'ordre n*, s'appelle *transformation de Laguerre*. Celle-ci est tout indiquée pour la résolution de

l'*équation différentielle de Laguerre*

$$\mathcal{L}x + nx = 0,$$

où

$$\mathcal{L}x\,(t) = tx''\,(t) + (1 - t)\,x'\,(t). \tag{4.18}$$

L'application de la transformation de Laguerre ramène l'opération de différentiation $\mathcal{L}x$ à une opération algébrique moyennant la formule

$$T\,\{\mathcal{L}[x\,(t)]\} = -nx^*\,(n) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Dans [159] on étudie la convolution pour les transformations de Laguerre

$$c\,(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\tau} a\,(\tau) \int_0^\tau e^{\sqrt{t\tau}\cos\varphi} \cos\,(\sqrt{t\tau}\sin\varphi) \times$$
$$\times\, b\,(t + \tau - 2\sqrt{t\tau}\cos\varphi)\, d\varphi\, d\tau$$

et on construit l'appareil du calcul opérationnel pour les opérateurs de Laguerre $\mathcal{L}x$.

Bibliographie du chapitre IV

[134], [238], [74], [38], [85], [159], [254].

CHAPITRE V

CALCUL OPÉRATIONNEL

§ 1. Notions fondamentales et propositions

Soit M l'ensemble de toutes les fonctions absolument continues et, plus généralement, des fonctions à valeurs complexes, définies sur la section $0 \leqslant t < +\infty$, L l'ensemble de toutes les fonctions définies sur la section $0 \leqslant t < +\infty$ et intégrables-Lebesgue sur tout intervalle fini $]0, A[$.

Si une fonction $F(t) \in M$, pour presque tous les t existe la dérivée $F'(t) = f(t) \in L$ et $F(t) = F(0) + \int_0^t f(u)\,du$. Réciproquement, si $g(t) \in L$, la fonction $G(t) = \int_0^t g(u)\,du$ appartient à l'ensemble M et presque partout $G'(t) = g(t)$. Si $f(t) \in L$, $g(t) \in L$, pour presque tous les t existe l'intégrale

$$\int_0^t f(t-\xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

qui appartient à l'ensemble L. L'intégrale

$$\int_0^t G(t-\xi)\,f(\xi)\,d\xi,$$

où $G(t) \in M$, $f(t) \in L$, appartient à l'ensemble M. Si

$$H(t) = \int_0^t F(t-\xi)\,G(\xi)\,d\xi,$$

où $F(t) \in M$, $G(t) \in M$, alors existe $H'(t) \in M$.

M est un ensemble linéaire et l'addition et la multiplication par un nombre y sont définies de façon naturelle. On appelle *produit*

des fonctions $F(t) \in M$ et $G(t) \in M$ l'expression

$$F(t) * G(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t F(t-\xi) G(\xi) \, d\xi. \tag{5.1}$$

Avec une telle définition du produit point n'est besoin de distinguer les nombres des fonctions constantes. Voici les *principales propriétés du produit* :

1°. Si $F(t) \in M$ et $G(t) \in M$, alors $F(t) * G(t) \in M$.

2°. Le produit est commutatif, i.e. $F(t) * G(t) = G(t) * F(t)$.

3°. Le produit est associatif, i.e.

$$(F(t) * G(t)) * H(t) = F(t) * (G(t) * H(t)).$$

4°. Le produit est distributif par rapport à l'addition, i.e.

$$F(t) * (G(t) + H(t)) = F(t) * G(t) + F(t) * H(t).$$

5°. Si pour tous les $t \in [0, +\infty[$ et $F(t) \not\equiv 0$ $F(t) * G(t) = 0$, alors $G(t) = 0$ [165].

L'ensemble M forme un anneau commutatif relativement à l'addition et la multiplication au sens (5.1). La propriété 5° traduit le fait que cet anneau ne possède pas de diviseurs de zéro. Tout anneau commutatif ne possédant pas de diviseurs de zéro peut être élargi à un corps de quotients. Appelons *couple* l'expression $(F(t), G(t))$, où $F(t) \in M$, $G(t) \in M$ et $G(t) \not\equiv 0$. Deux couples $(F(t), G(t))$ et $(F_1(t), G_1(t))$ sont *équivalents* si

$$F(t) * G_1(t) = F_1(t) * G(t). \tag{5.2}$$

Dans ce cas (et seulement dans ce cas) on écrira $(F, G) \sim (F_1, G_1)$. L'ensemble des couples (F, G) est divisé en classes d'équivalence. Comme tous les éléments équivalents à un élément d'une classe appartiennent à cette même classe, celle-ci est définie par un de ses éléments que l'on appelle *représentant de la classe*. Désignons par $\frac{F}{G}$ la classe qui contient le couple (F, G). En vertu de cette définition, $\frac{F}{G} = \frac{F_1}{G_1}$ si, et seulement si, $F * G_1 = F_1 * G$. Définissons la somme et le produit des symboles $\frac{F}{G}$ en postulant que

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F}{G} + \frac{F_1}{G_1} = \frac{(F * G_1 + F_1 * G)}{G * G_1}, \\ &\frac{F}{G} * \frac{F_1}{G_1} = \frac{F * F_1}{G * G_1} \\ &(G * G_1 \not\equiv 0). \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Les seconds membres des dernières égalités ne dépendent pas du choix des représentants des classes $\frac{F}{G}$ et $\frac{F_1}{G_1}$. L'ensemble de tous les

symboles $\frac{F}{G}$ forme un corps commutatif. Désignons-le par $\mathfrak{M}$. Appelons *opérateurs* les éléments du corps $\mathfrak{M}$. Les formules (5.3) définissent la somme et le produit des opérateurs. Les opérateurs seront souvent désignés par une seule lettre, par exemple, $a = \frac{F}{G}$, $b = \frac{R}{H}$, etc. Enfin, pour simplifier l'écriture, là où aucune confusion n'est à craindre, on notera ab le produit des opérateurs a et b. Donc, si $a = \frac{F}{G}$ et $b = \frac{R}{H}$ sont des opérateurs, ab est leur produit et de plus $ab = a * b = \frac{F * R}{G * H}$. Le symbole $\frac{F}{G}$ représente la division dans $\mathfrak{M}$. Cette dernière se distingue singulièrement de la division ordinaire.

Voici les principales propriétés de l'addition et de la multiplication dans le corps $\mathfrak{M}$:

1°. $ab = ba$.
2°. $(ab)\, c = a\, (bc)$.
3°. $a\, (b + c) = ab + ac$.

On peut identifier l'ensemble des opérateurs de la forme $\frac{F(t)}{1}$ à l'ensemble M ; en effet, à chaque opérateur $\frac{F(t)}{1}$ on peut associer une fonction $F(t) \in M$. On dit alors que $\mathfrak{M}$ est une extension de l'anneau M. Au lieu de $\frac{F}{F}$ on écrira 1 : cet opérateur s'appelle *échelon unité de Heaviside*. Au lieu de $\frac{0}{G}$ on écrira 0.

Les constantes appartiennent au corps $\mathfrak{M}$. La division des constantes dans $\mathfrak{M}$ se confond avec le quotient ordinaire de constantes. L'équation

$$F(t) * x(t) = G(t) \tag{5.4}$$

n'admet pas toujours une solution dans l'anneau M. Par exemple, si $F(t) = t$ et $G(t) = 1$, alors l'équation (5.4) prend la forme

$$\frac{d}{dt} \int_0^t (t - \xi)\, x(\xi)\, d\xi = 1,$$

ou

$$\int_0^t x(\xi)\, d\xi = 1, \tag{5.5}$$

et l'ensemble M ne contient pas de fonction $x(t)$ vérifiant l'équation (5.5). Dans le corps $\mathfrak{M}$, toute équation $ax = b$ $(a \neq 0)$ possède toujours la solution $x = a^{-1}b = \frac{b}{a}$.

Le corps $\mathfrak{M}$ contient l'ensemble L. Supposons que $f(t) \in L$, alors $F(t) = \int_0^t f(u)\,du \in M$ et $F(0) = 0$. Associons à la fonction $f(t)$ l'opérateur $\frac{F(t)}{t}$. A deux fonctions distinctes $f(t)$ et $g(t)$ de l'ensemble L correspondent les opérateurs distincts $\frac{F(t)}{t}$ et $\frac{G(t)}{t}$, puisque dans le cas contraire $t * F = t * G$ ou $t * (F - G) = 0$, d'où $F(t) \equiv G(t)$. A tout opérateur $\frac{H(t)}{t}$, $H(0) = 0$ est associée une fonction $h(t) = H'(t) \in L$. Donc, nous avons établi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des opérateurs de la forme $\frac{F(t)}{t}$ et l'ensemble L. A la somme des fonctions $f(t) + g(t)$ est associée la somme des opérateurs $\frac{F(t)}{t} + \frac{G(t)}{t}$, au produit de la fonction $f(t)$ par λ le produit de l'opérateur $\frac{F(t)}{t}$ par λ. Les propriétés énumérées permettent d'assimiler les opérateurs de la forme $\frac{F(t)}{t}$, $F(0) = 0$ aux fonctions de l'ensemble L et de ne faire aucune distinction entre la fonction $f(t) \in L$ et l'opérateur $\frac{F(t)}{t}$. On écrira donc

$$\frac{F(t)}{t} = F'(t) = f(t). \tag{5.6}$$

Il est naturel d'appeler *fonctions* les opérateurs du corps $\mathfrak{M}$ qui se ramènent à la forme $\frac{F}{t}$, $F(0) = 0$, et *réalisation de l'opérateur* $\frac{H(t)}{G(t)}$ l'opération qui consiste à le ramener à la forme $\frac{F(t)}{t}$, $F(0) = 0$. Les opérateurs n'admettent pas tous une réalisation; par exemple, l'opérateur $\frac{1}{t}$ ne peut être ramené à la forme $\frac{F(t)}{t}$, $F(0) = 0$. Une somme de fonctions est toujours une fonction. Un exemple simple nous montre que le produit de fonctions n'est pas toujours une fonction, i.e. le produit des opérateurs $f(t) = \frac{F}{t}$ et $g(t) = \frac{G}{t}$ ($F(0) = 0$, $G(0) = 0$) ne peut pas toujours être ramené à la forme $\frac{H(t)}{t}$, $H(0) = 0$. En effet, supposons que $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, i.e. $F(t) = \sqrt{t}$, $G(t) = \sqrt{t}$. Alors

$$f(t) * g(t) = \frac{F(t) * G(t)}{t * t} = \frac{\frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{(t-\xi)\,\xi}\,d\xi}{t * t},$$

d'où

$$f(t) * g(t) = \frac{\pi t}{4t * t} = \frac{\pi}{4t}.$$

Donc, l'ensemble des opérateurs de la forme $\frac{F(t)}{t}$, $F(0) = 0$ n'est pas un anneau. Cependant on a le

Théorème 1. *Si l'une des fonctions $f(t)$ ou $g(t)$ est absolument continue, i.e. appartient à l'ensemble M, alors le produit de ces fonctions est de nouveau une fonction ayant pour expression*

$$f(t) * g(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t-\xi)\, g(\xi)\, d\xi. \tag{5.7}$$

L'opérateur $\frac{F(t)}{t}$ peut être considéré comme le produit de l'opérateur $\frac{1}{t}$ par la fonction $\frac{F(t)}{1} = F(t)$. L'opérateur $\frac{1}{t}$ est fondamental dans le calcul opérationnel. On le désigne spécialement par $p = \frac{1}{t}$. La formule (5.6) s'écrit

$$pF(t) = F'(t). \tag{5.8}$$

Ici $F(t) \in M$ et $F(0) = 0$. Si $F(t)$ est une fonction quelconque appartenant à M, de (5.8) il vient

$$pF(t) = F'(t) + pF(0). \tag{5.9}$$

Donc, lorsque $F(t) \in M$ et $F(0) = 0$, le produit de la fonction $F(t)$ par l'opérateur p désigne tout simplement sa dérivation. Le produit pa a un sens pour tout opérateur $a \in \mathfrak{M}$; en général pa est un opérateur. Pour que pa soit une fonction, il est nécessaire et suffisant que $a = F(t) \in M$ et $F(0) = 0$. L'opérateur p est appelé *opérateur de dérivation*. Si $F'(t) \in M$, de (5.9) il s'ensuit que

$$p(pF(t)) = p^2F(t) = F''(t) + pF'(0) + p^2F(0). \tag{5.10}$$

D'une façon générale, lorsque $F(t)$ possède une dérivée d'ordre n appartenant à l'ensemble M, l'application répétée de la formule (5.9) donne

$$p(p^{n-1}F(t)) = p^nF(t) = F^{(n)}(t) + pF^{(n-1)}(0) + \\ + p^2F^{(n-2)}(0) + \ldots + p^nF(0), \tag{5.11}$$

où p^n est le produit de n opérateurs $p * p * \ldots * p$ dans le corps $\mathfrak{M}$. Si dans (5.9), on pose $F(t) = e^{at}$, il vient $pe^{at} = ae^{at} + p$ ou $(p-a)\,e^{at} = p$, d'où

$$\frac{p}{p-a} = e^{at}. \tag{5.12}$$

De façon analogue, en posant $F(t) = \sin \omega t$, $F(t) = \cos \omega t$ dans (5.10), on obtient

$$\frac{\omega p}{p^2+\omega^2} = \sin \omega t, \quad \frac{p^2}{p^2+\omega^2} = \cos \omega t. \tag{5.13}$$

L'égalité

$$p(te^{at}) = ate^{at} + e^{at}$$

entraîne

$$(p-a)\, te^{at} = e^{at}$$

ou (cf. (5.12))

$$(p-a)\, te^{at} = \frac{p}{p-a};$$

d'où

$$\frac{p}{(p-a)^2} = te^{at}.$$

Dans le cas général, on a

$$\frac{p}{(p-a)^n} = \frac{t^{n-1}e^{-at}}{\Gamma(n)}. \tag{5.14}$$

L'opérateur p^{-1}, inverse de p, est de toute évidence égal à t. La fonction $F(t) = t$ appartient à M. Donc de (5.1) il s'ensuit que quelle que soit $f(t) \in L$

$$p^{-1}f(t) = \int_0^t f(\xi)\, d\xi. \tag{5.15}$$

Donc, le produit de p^{-1} par $f(t)$ n'est autre que l'intégration. L'opérateur p^{-1} s'appelle *opérateur d'intégration*. Soit p^{-n} le produit des n opérateurs $p^{-1} * p^{-1} * \ldots * p^{-1}$; de (5.15) il vient

$$p^{-n} = \frac{t^n}{n!}. \tag{5.16}$$

La formule (5.1) donne pour $f(t) \in L$

$$p^{-n}f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\xi)^{n-1} f(\xi)\, d\xi. \tag{5.17}$$

§ 2. Opérateurs rationnels

L'objet le plus important du calcul opérationnel est l'étude des opérateurs de la forme $Z(p)$, où $Z(\lambda)$ est une fonction de la variable λ. Exemple: les opérateurs $\frac{p}{p-a}$, $\frac{p}{p^2+\omega^2}$, p^{-n} étudiés au paragraphe précédent. Dans le cas simple où $Z(\lambda)$ est une fonction rationnelle,

i.e.

$$Z(\lambda)=\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)},$$

où $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$ sont les polynômes

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\lambda^k \quad \text{et} \quad Q(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\beta_k\lambda^k,$$

il est naturel de définir l'opérateur $Z(p)$ à l'aide de l'égalité

$$Z(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}. \tag{5.18}$$

Les opérateurs $P(p)$ et $Q(p)$ appartiennent au corps $\mathfrak{M}$, donc leur quotient $\frac{P(p)}{Q(p)}$ appartiendra également au corps $\mathfrak{M}$. L'opérateur $Z(p)$ est appelé *opérateur rationnel*. Il s'agit maintenant de savoir pour quelles fonctions rationnelles $Z(\lambda)$, les opérateurs $Z(p)$ se ramènent à des fonctions. Pour cela il est nécessaire et suffisant que le degré du polynôme $P(\lambda)$ soit inférieur ou égal à celui du polynôme $Q(\lambda)$. Donc, si $n \leqslant m$, il existe une fonction $\varphi(t)$ telle que

$$Z(p)=\varphi(t); \tag{5.19}$$

en outre il est aisé d'établir que $\varphi(t)$ appartient à M. Si la valeur de l'opérateur $Z(p)$ est connue sur l'échelon unité, la valeur $Z(p)f(t)$, où $f(t)\in L$, est donnée par la formule

$$Z(p)f(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t\varphi(t-\xi)f(\xi)\,d\xi,\quad \varphi(t)\in M. \tag{5.20}$$

La fonction $\varphi(t)$ de l'équation (5.19) peut être déterminée par une décomposition de $\lambda^{-1}Z(\lambda)$ en fractions simples. On pourrait se servir des théorèmes de Heaviside de décomposition (cf. chapitre II, § 3). Si, par exemple, les racines du dénominateur $Q(\lambda)$ sont simples et $Q(0)\neq 0$, alors

$$Z(p)=\frac{P(0)}{Q(0)}+\sum_{k=1}^{m}\frac{P(\lambda_k)}{\lambda_k Q'(\lambda_k)}e^{\lambda_k t}. \tag{5.21}$$

Ici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sont les racines du polynôme $Q(\lambda)$. Si $Q(0)=0$, cela veut dire que $Q(p)=pQ_1(p)$, où $Q_1(0)\neq 0$. En se servant de (5.21), on trouve $\frac{P(p)}{Q(p)}=\varphi_1(t)$, et ensuite

$$Z(p)=p^{-1}*\varphi_1(t)=\int_0^t\varphi_1(u)\,du.$$

Bien plus complexe est le cas où les racines sont multiples. Si, par exemple, $\lambda=\lambda_1$ est une racine multiple, en décomposant

$\lambda^{-1}Z(\lambda)$ en fractions simples, il apparaîtra des fractions $\frac{A}{(\lambda-\lambda_1)^r}$. Donc, $\varphi(t)$ contiendra des termes $A_r t^{r-1} e^{\lambda_1 t}$ et dans le cas général, la solution de l'équation (5.19) sera de la forme

$$\varphi(t)=\sum_{k,\ r} A_{kr} t^{r-1} e^{\lambda_k t}. \qquad (5.22)$$

Réciproquement, pour toute fonction $\varphi(t)$ de la forme (5.22), il existe un opérateur rationnel $Z(p)$ tel que $Z(p) = \varphi(t)$. Les opérateurs rationnels ne parcourent pas le corps $\mathfrak{M}$ tout entier. Ils forment un sous-corps de $\mathfrak{M}$, qui s'obtient par extension de l'anneau des fonctions (5.22). Tout élément de ce sous-corps peut être représenté par un opérateur rationnel $Z(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$. Si $n \leqslant m$, $Z(p)$ est une fonction, sinon c'est un opérateur. Le résultat précédent peut être généralisé à une classe plus large d'opérateurs du corps $\mathfrak{M}$. Cette généralisation s'opère le plus facilement à l'aide de la transformation de Laplace.

§ 3. Opérateurs transformables-Laplace

Soit S l'ensemble de toutes les fonctions $f(t) \in L$ telles que l'*intégrale de Laplace*

$$f^*(z)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-zt}\,dt$$

soit absolument convergente, et S^* l'ensemble de leurs transformées de Laplace. Si l'opérateur $a \in \mathfrak{M}$ admet un représentant $(F(t), G(t))$ tel que $F(t) \in S$ et $G(t) \in S$, cet opérateur est dit *transformable-Laplace*. La fonction

$$\bar{a}(z)=\frac{F^*(z)}{G^*(z)}, \qquad (5.23)$$

où

$$a=\frac{F(t)}{G(t)},$$

$$F^*(z)=\int_0^\infty F(t)\,e^{-zt}\,dt, \quad G^*(z)=\int_0^\infty G(t)\,e^{-zt}\,dt,$$

est la *transformée de Laplace de l'opérateur* $a = \frac{F(t)}{G(t)}$. Il est aisé de vérifier que la définition de $\bar{a}(z)$ ne dépend pas du choix du représentant (F, G) et donc $\bar{a}(z)$ est défini de façon unique par l'opérateur a. Cette transformation est noté symboliquement

$$a \risingdotseq \bar{a}(z). \qquad (5.24)$$

L'ensemble de tous les opérateurs transformables-Laplace du corps $\mathfrak{M}$ est noté $\mathfrak{N}$, et l'ensemble de leurs transformés $\overline{\mathfrak{N}}$.

Théorème 2. *La transformation* (5.24) *établit entre les ensembles* $\mathfrak{N}$ *et* $\overline{\mathfrak{N}}$ *une correspondance biunivoque qui associe à la somme d'opérateurs* $a + b$ *la somme des fonctions* $\bar{a}(z) + \bar{b}(z)$, *et au produit* $a * b$ *le produit ordinaire* $\bar{a}(z)\,\bar{b}(z)$. *Le zéro et l'unité de l'ensemble* $\mathfrak{N}$ *se transforment en le zéro et l'unité de l'ensemble* $\overline{\mathfrak{N}}$.

Ce théorème établit l'isomorphisme des corps $\mathfrak{N}$ et $\overline{\mathfrak{N}}$. Ceci étant, l'opérateur de dérivation $p = \frac{1}{t}$ est associé à la fonction $\bar{a}(z) = z$, i.e. $p \doteqdot z$. Donc, pour tout opérateur rationnel, on a

$$Z(p) = \frac{P(p)}{Q(P)} \doteqdot \frac{P(z)}{Q(z)} = Z(z). \tag{5.25}$$

Si l'opérateur est une fonction $f(t) \in S$, alors

$$f(t) \doteqdot zf^*(z) = \bar{f}(z). \tag{5.26}$$

Les ensembles $\mathfrak{N}$ et $\overline{\mathfrak{N}}$ étant isomorphes l'un à l'autre, la distinction qui existe entre eux n'est pas essentielle dans la plupart des cas, ce qui permet de ne pas différencier l'opérateur p du nombre complexe z. Aussi, souvent remplacerons-nous z par p. Dans nombre de cas la notation de l'opérateur de dérivation et d'un nombre complexe par une même lettre simplifie l'exposé. Donc, p désignera l'opérateur de dérivation dans le corps $\mathfrak{N}$ et un nombre complexe dans le corps $\overline{\mathfrak{N}}$. Au lieu de (5. 26) on écrira

$$f(t) = \bar{f}(p). \tag{5.27}$$

Dans les notations adoptées $f^*(p)$ représente la transformée de Laplace de la fonction $f(t) \in S$, $\bar{f}(p)$ la transformée de Laplace de l'opérateur $f(t) = \frac{F(t)}{t}$, où $F(t) = \int_0^t f(u)\,du$. Entre $\bar{f}(p)$ et $f^*(p)$ on a la relation suivante $\bar{f}(p) = pf^*(p)$. Dans le cas général, si $a \in \mathfrak{N}$ et $a = \frac{F(t)}{G(t)}$, alors

$$\bar{a}(p) = \frac{F^*(p)}{G^*(p)}. \tag{5.28}$$

L'isomorphisme (5.28) ramène l'étude de la structure du corps des opérateurs $\mathfrak{N}$ à celle du corps $\overline{\mathfrak{N}}$. Ainsi donc, dans le corps des opérateurs $\mathfrak{M}$ on peut définir un sous-corps $\mathfrak{N}$ isomorphe à un corps $\overline{\mathfrak{N}}$ dont les éléments sont des fonctions de la variable complexe p d'un type défini. Tout opérateur du corps $\mathfrak{N}$ peut être considéré comme une

fonction de l'opérateur p, i.e. $a = \bar{a}(p)$. Cette dernière propriété peut être étendue au corps $\mathfrak{M}$ tout entier moyennant la transformation de Laplace généralisée [46], [49].

§ 4. Sur la réalisation des opérateurs transformables-Laplace

Le corps des opérateurs $\mathfrak{N}$, isomorphe au corps $\overline{\mathfrak{N}}$, forme dans $\mathfrak{M}$ une classe d'opérateurs qui est vaste et importante pour les applications. Toute fonction mesurable $f(t)$ qui ne croît pas plus vite que e^{qt}, i.e. vérifie pour tous les t assez grands la condition

$$|f(t)| < Ke^{qt}, \tag{5.29}$$

où K et q sont des constantes, appartient à l'ensemble S. En général, pour qu'une fonction $f(t) \in L$ appartienne à S, il est nécessaire et suffisant que pour une constante q

$$\lim_{t\to\infty} e^{-qt} \int_0^t f(u)\,du = 0.$$

Donc, le corps des opérateurs $\mathfrak{N}$ est une extension de l'anneau des fonctions vérifiant la condition (5.29), où les constantes K et q ne sont pas les mêmes pour toutes les fonctions. Si l'opérateur a est susceptible d'être ramené à la forme $\frac{F(t)}{t} = f(t)$ et que la fonction $f(t)$ appartienne à l'ensemble S, alors

$$a = \frac{F(t)}{t} = pf^*(p), \tag{5.30}$$

où

$$f^*(p) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt. \tag{5.31}$$

La réalisation de l'opérateur est primordiale lorsqu'on résout des problèmes par les méthodes du calcul opérationnel. Il est indispensable de disposer de critères qui permettraient de conclure si oui ou non l'opérateur considéré peut être ramené à une fonction. Les théorèmes et lemmes du § 1, chap. II, fournissent dans nombre de cas une réponse à cette question.

Ici et dans la suite, on rencontrera des fonctions multivoques $\sqrt{p}$, $\ln p$, $\operatorname{arctg} p$, etc. Dans tous les cas, si le contraire n'est pas spécifié, on envisagera toujours la détermination de la fonction pour laquelle $\sqrt{1} = 1$, $\ln 1 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, avec arg $1 = 0$, i.e. la détermination principale de la fonction.

Par exemple, l'opérateur $\sqrt{p}$ se ramène à une fonction, puisque $\frac{\sqrt{p}}{p}$ vérifie le théorème 5 du chapitre II. Il en est de même des opérateurs $e^{-\lambda\sqrt{p}}$, $\frac{\operatorname{ch}\mu\sqrt{p}}{\operatorname{ch}\sqrt{p}}$ $(0<\mu<1)$ en vertu du théorème 6 du chapitre II, ainsi que des opérateurs $\sin\frac{1}{\sqrt{p}}$, $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$, $J_0\left(\frac{1}{p}\right)$, $p\,(e^{\frac{1}{p}}-1)$, en vertu du théorème 3 du chapitre II, etc.

Si une fonction $\bar{a}(p)$ est régulière au voisinage d'un point situé à l'infini, l'opérateur $\bar{a}(p)$ est dit *régulier.*

Théorème 3. *Si $\bar{a}(p)$ est un opérateur régulier et $f(t)\in L$ alors*

$$\bar{a}(p)\,f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\frac{1}{p^k}f(t), \tag{5.32}$$

où

$$\bar{a}(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{p^k},\quad |p|>\rho.$$

La série (5.32) est uniformément convergente sur tout intervalle $0\leqslant t\leqslant T$.

Par exemple, l'opérateur $\frac{p}{\sqrt{p^2+\lambda^2}}$ est régulier, donc

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+\lambda^2}}=\left(1+\frac{\lambda^2}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{p^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\lambda^4}{p^4}+\ldots=$$
$$=1-\frac{1}{2}\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{(\lambda t)^4}{4!}-\ldots=J_0(\lambda t).$$

De façon analogue, en développant $e^{-\frac{\lambda}{p}}$ suivant les puissances de $\frac{\lambda}{p}$, on obtient

$$e^{-\frac{\lambda}{p}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\lambda^k}{p^k}=J_0(2\sqrt{\lambda t}).$$

Lorsqu'un opérateur se ramène à une fonction, les valeurs de cette dernière sont obtenues à partir de (5.31) moyennant l'intégrale (cf. chapitre II, § 1)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(p)\,e^{pt}\,dp. \tag{5.33}$$

Pour obtenir une expression commode au calcul de la fonction $f(t)$ comme on l'a indiqué au chapitre II, il faut souvent changer de façon adéquate le chemin d'intégration dans les formules (5.33). Ceci étant, dans la plupart des cas, il s'avère possible d'utiliser les lemmes de Jordan (cf. chapitre II). On trouvera des exemples de réalisation des opérateurs dans [246], [50], [35], [146], [64].

§ 5. Transformation généralisée de Laplace

Les propriétés standard de la transformation de Laplace entraînent que S^* (cf. § 3) est un anneau par rapport à l'addition et à la multiplication ordinaires. L'ensemble S^* ne contient pas de constantes. Cependant le produit $\lambda f^*(p) \in S$ quel que soit λ. Dans la suite, nous étudierons l'anneau S^* sur le corps des nombres complexes. Soit J_ω l'ensemble de toutes les fonctions de S^* représentables sous la forme $e^{-p\omega}g^*(p)$, où $g^*(p) \in S^*$ et $\omega \geqslant 0$. Le produit $e^{-p\omega}g^*(p)$ appartient à S^* pour toute fonction $g^*(p) \in S^*$. Il est évident que J_ω est un idéal *) de S^*. Formons l'anneau $S^*_\omega = \frac{S^*}{J_\omega}$. Il est standard que les éléments de S^*_ω sont des classes mixtes par rapport à J_ω. Plus exactement, l'ensemble S^* se décompose en ensembles f_ω tels que deux éléments $f_1^*(p)$ et $f_2^*(p)$ appartiennent à un même f_ω si, et seulement si, $f_1^*(p) - f_2^*(p)$ appartient à J_ω. Dans ce cas les éléments $f_1^*(p)$ et $f_2^*(p)$ sont dits *comparables sur l'idéal* J_ω. On écrit souvent

$$f_1^*(p) \equiv f_2^*(p)\,(J_\omega).$$

Soient f_ω et g_ω des éléments de S^*_ω. Il est standard que la *somme* $f_\omega + g_\omega$ et le *produit* $f_\omega g_\omega$ des classes f_ω et g_ω sont par définition les classes qui contiennent les éléments $f^*(p) + g^*(p)$ et $f^*(p)\ g^*(p)$, où $f^*(p)$ et $g^*(p)$ sont des représentants des classes f_ω et g_ω, i.e. $f^*(p) \in f_\omega$ et $g^*(p) \in g_\omega$.

R e m a r q u e 1. Supposons que $\omega > \rho$; il est évident que $J_\omega \subset J_\rho$. Donc, si les classes f_ω et f_ρ contiennent au moins un élément commun $f^*(p)$, alors $f_\omega \subset f_\rho$ (f_ρ contient l'ensemble f_ω).

Composons la somme directe des ensembles S^*_ω, ω parcourant l'ensemble ordonné de tous les réels positifs, $0 < \omega < +\infty$. On sait que les éléments de la somme directe sont les systèmes $\{f_\omega\}$, $0 < \omega < +\infty$, où f_ω est un élément de S^*_ω. Si $\{g_\omega\}$ est un autre élément de la somme directe, alors par définition

$$\{f_\omega\} + \{g_\omega\} = \{f_\omega + g_\omega\},$$
$$\{f_\omega\}\{g_\omega\} = \{f_\omega g_\omega\},$$
$$\lambda\{g_\omega\} = \{\lambda g_\omega\}.$$

*) On appelle idéal sur un anneau S^* un ensemble d'éléments jouissant des propriétés suivantes: 1) si $a \in J_\omega$ et $b \in J_\omega$, alors $a + b \in J_\omega$; 2) si $a \in J_\omega$, $b \in J_\omega$, alors le produit $ab \in J_\omega$.

Parmi les éléments $\{f_\omega\}$ de la somme directe des ensembles S^*_ω considérons ceux pour lesquels est réalisée la condition $f_\omega \supset f_\rho$ toutes les fois que $\omega < \rho$. Ici f_ω et f_ρ sont considérés comme des ensembles de S^*. Désignons par L^* l'ensemble de tous les éléments de la somme directe et par $\{f_\omega\}$ ces éléments eux-mêmes. On montre que l'ensemble L^* est un anneau dont l'élément nul est $\{J_\omega\}$.

Remarque 2. Supposons que dans l'anneau S^* est donné un opérateur linéaire T dont les valeurs appartiennent à S^*. Supposons que l'idéal J_ω est invariant par l'opérateur T, i.e. si $f^*(p) \in J_\omega$, alors $Tf^*(p) \in J_\omega$. Dans ce cas l'opérateur T induit sur l'anneau S^*_ω un opérateur linéaire que nous désignerons également par T. Si $f_\omega \in S^*_\omega$, alors Tf_ω désigne une classe dont un représentant est l'élément $Tf^*(p)$, où $f^*(p) \in f_\omega$.

Supposons que $\{f_\omega\}$ appartient à l'anneau L^*. Définissons $T\{f_\omega\}$ en supposant que $T\{f_\omega\} = \{Tf_\omega\}$. Considérons l'intégrale

$$f^*_\omega(p) = \int_0^\omega f(t)\, e^{-pt}\, dt, \quad f(t) \in L. \tag{5.34}$$

Soit f_ω la classe mixte de l'ensemble $S^*_\omega = \frac{S^*}{J_\omega}$ qui contient la fonction $f^*_\omega(p)$. Comme pour $\rho > \omega$

$$f^*_\rho(p) - f^*_\omega(p) = \int_\omega^\rho f(t)\, e^{-pt}\, dt = e^{-\omega p} \int_0^{\rho-\omega} f(t+\omega)\, e^{-pt}\, dt, \tag{5.35}$$

alors $f^*_\rho(p) - f^*_\omega(p) \in J_\omega$. Donc $f^*_\rho(p) \in f_\omega$ et $f_\omega \supset f_\rho$. De là il s'ensuit que $\{f_\omega\} \in L^*$. L'élément $\{f_\omega\}$ s'appelle *transformée généralisée de Laplace* de la fonction $f(t)$. La correspondance entre les ensembles L et L^*, engendrée par la transformation généralisée de Laplace sera désignée symboliquement par :

$$f(t) \risingdotseq \{f_\omega\}. \tag{5.36}$$

Cette notation se justifie par le fait que la transformation généralisée de Laplace se confond avec la transformation ordinaire si celle-ci existe.

Propriétés de la transformation généralisée de Laplace

1°. Si $f(t) \risingdotseq \{f_\omega\}$ et $g(t) \risingdotseq \{g_\omega\}$, alors $\lambda f(t) + \mu g(t) \risingdotseq$ $\risingdotseq \lambda\{f_\omega\} + \mu\{g_\omega\}$, où λ et μ sont des constantes.

2°. La transformée généralisée de Laplace $\{f_\omega\}$ définit la fonction $f(t)$ de façon unique à un ensemble de mesure nulle près.

3°. Théorème 4 (théorème généralisé de Borel). *Soient $f(t) \risingdotseq \{f_\omega\}$ et $g(t) \risingdotseq \{g_\omega\}$, alors*

$$\int_0^t f(t-\xi)\, g(\xi)\, d\xi \risingdotseq \{f_\omega\}\{g_\omega\}.$$

4°. Soient $f(t) \doteqdot \{f_\omega\}$. Pour que la fonction $f(t)$ appartienne à l'ensemble S, il est nécessaire et suffisant que l'intersection de tous les ensembles f_ω, $\omega_0 \leqslant \omega < +\infty$ (f_ω est considéré comme un ensemble de S^*), ne soit pas vide.

Les autres propriétés connues de la transformation ordinaire de Laplace se transposent à la transformation généralisée de Laplace.

5°. Théorème 5 (théorème de retard). *Si* $f(t) \doteqdot \{f_\omega\}$ *et*

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \textit{lorsque} \quad 0 < t < \tau, \\ f(t-\tau), & \textit{lorsque} \quad 0 < \tau < t, \end{cases}$$

alors $f_\tau(t) \doteqdot \{e^{-pt} f_\omega\}$ *ou* $f_\tau(t) \doteqdot e^{-p\tau}\{f_\omega\}$.

6°. Théorème 6 (théorème de translation). *Si* $f(t) \doteqdot \{f_\omega\}$, *alors* $f(t)\, e^{at} \doteqdot \{f_\omega(p-a)\}$.

$f_\omega(p-a)$ désigne ici la classe mixte par rapport à l'idéal J_ω, dont un représentant est l'élément $f^*_\omega(p-a) = \int\limits_0^\omega e^{at-pt} f(t)\, dt$ où $f^*_\omega(p)$ est un représentant de la classe f_ω.

7°. Théorème 7 (théorème de similitude). *Si* $f(t) \doteqdot \{f_\omega\}$, *alors* $f(at) \doteqdot \frac{1}{a}\left\{f_\omega\left(\frac{p}{a}\right)\right\}$.

$f_\omega\left(\frac{p}{a}\right)$ désigne ici la classe mixte par rapport à l'idéal $J_{\frac{\omega}{a}}$ dont un représentant est l'élément $f^*_\omega\left(\frac{p}{a}\right)$, où $f^*_\omega(p) \in f_\omega$.

§ 6. Le corps $\overline{\mathfrak{M}}$

Au § 5, on a construit l'anneau L^* des éléments $\{f_\omega\}$, transformées de Laplace généralisées. L'anneau L^* ne possède pas de diviseurs de zéro. Ceci découle du théorème généralisé de Borel et du théorème de Titchmarch. Donc, l'anneau L^* peut être étendu à un corps de quotients. Procédons comme au § 1 pour l'extension de l'anneau M et introduisons les symboles $\frac{\{f_\omega\}}{\{g_\omega\}}$ où $\{g_\omega\} \neq J$. Par définition, on a $\frac{\{f_\omega\}}{\{g_\omega\}} = \frac{\{h_\omega\}}{\{k_\omega\}}$ dans le cas seulement où $\{f_\omega\}\{k_\omega\} = \{g_\omega\}\{h_\omega\}$. Ce qui veut dire que pour tous les représentants $f^*_\omega(p) \in f_\omega$, $g^*_\omega(p) \in g_\omega$, $k^*_\omega(p) \in k_\omega$ et $h^*_\omega(p) \in h_\omega$, on aura

$$f^*_\omega(p)\, k^*_\omega(p) \equiv g^*_\omega(p)\, h^*_\omega(p)\, (J_\omega), \quad \omega \geqslant \omega_0. \tag{5.37}$$

L'ensemble de tous les éléments de la forme $\frac{\{f_\omega\}}{\{g_\omega\}}$ constitue un corps que nous noterons $\overline{\mathfrak{M}}$. Donc, à un isomorphisme près l'exten-

sion de l'anneau L^* à un corps de quotients coïncide avec le corps $\overline{\mathfrak{M}}$. Soit maintenant $a=\frac{F(t)}{G(t)}$ un opérateur quelconque du corps $\mathfrak{M}$. Associons à l'opérateur a un élément du corps $\overline{\mathfrak{M}}$ égal à $\frac{\{F_\omega\}}{\{G_\omega\}}$, où $\{F_\omega\}$ et $\{G_\omega\}$ sont les transformées généralisées de Laplace des fonctions $F(t)$ et $G(t)$ respectivement. Appelons l'élément $\bar{a}=\frac{\{F_\omega\}}{\{G_\omega\}}$ *transformée généralisée de Laplace de l'opérateur* a. Désignons cette correspondance par $a=\bar{a}$ ou encore de façon plus détaillée

$$\frac{F(t)}{G(t)}=\frac{\{F_\omega\}}{\{G_\omega\}}. \tag{5.38}$$

Il est immédiat de vérifier que (5.38) est une correspondance biunivoque qui à une somme d'opérateurs de $\mathfrak{M}$ associe la somme des éléments correspondants de $\overline{\mathfrak{M}}$, à un produit d'opérateurs de $\mathfrak{M}$ le produit des éléments correspondants de $\overline{\mathfrak{M}}$; à l'élément nul de $\mathfrak{M}$ l'élément nul de $\overline{\mathfrak{M}}$, à toute constante de $\mathfrak{M}$ la même constante de $\overline{\mathfrak{M}}$, et enfin à l'opérateur $\frac{1}{t}$ l'opérateur p. Si $F(t)$ et $G(t)$ admettent la transformation ordinaire de Laplace, i.e. les intégrales $\int\limits_0^\infty F(t)\,e^{-pt}\,dt$ et $\int\limits_0^\infty G(t)\,e^{-pt}dt$ sont absolument convergentes, alors la propriété 4° de la transformation généralisée de Laplace (cf. § 5) entraîne

$$\frac{F(t)}{G(t)}=\frac{F^*(p)}{G^*(p)}=\bar{a}(p),$$

d'où il vient, en particulier, qu'à l'opérateur $\frac{1}{t}$ est associée la fonction $\bar{a}(p)=p$. L'isomorphisme des corps $\mathfrak{M}$ et $\overline{\mathfrak{M}}$ définit la structure du corps des opérateurs de Mikusinski. Il s'avère que les propriétés des opérateurs du corps $\mathfrak{M}$ sont étroitement liées à celles des fonctions complexes de la forme $\frac{f_\omega^*(p)}{g_\omega^*(p)}$, où $f_\omega^*(p)$ et $g_\omega^*(p)$ sont des fonctions entières, représentables par les intégrales

$$f_\omega^*(p)=\int\limits_0^\omega f(t)\,e^{-pt}\,dt \quad \text{et} \quad g_\omega^*(p)=\int\limits_0^\omega g(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

§ 7. Fonctions opérationnelles

Les opérateurs dépendant d'un paramètre se rencontrent dans les applications du calcul opérationnel aux problèmes de physique mathématique. Dans ce paragraphe, on étudiera des opérateurs dépendant d'un paramètre réel. Si un opérateur a dépend d'un paramètre λ, $a \leqslant \lambda \leqslant b$, on écrira $a = a(\lambda)$ et on dira que $a(\lambda)$ est une *fonction opérationnelle*. Toute fonction opérationnelle est définie par son représentant $(F(t), G(t))$. Les fonctions F et G dépendent du paramètre λ, i.e. dans le cas général $F = F(t; \lambda)$ et $G = G(t; \lambda)$. De plus, la fonction $G(t; \lambda)$ n'est identiquement nulle pour aucune valeur du paramètre λ.

Voici des exemples de fonctions opérationnelles:

$$a(\lambda) = \frac{p}{p-\lambda} e^{-\lambda t} \quad (-\infty < \lambda < +\infty),$$

$$a(\lambda) = \sqrt{p}\, e^{-\lambda\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \quad (-\infty < \lambda < +\infty),$$

$$a(\lambda) = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} e^{-\lambda\sqrt{p^2+1}} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \lambda, \\ J_0\left(\sqrt{t^2-\lambda^2}\right), & \text{pour } \lambda < t \end{cases} \quad (0 \leqslant \lambda < +\infty),$$

$$a(\lambda) = e^{-\lambda p} = \eta(t;\ \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t < \lambda, \\ 1, & \text{pour } \lambda \leqslant t \end{cases} \quad (0 \leqslant \lambda < +\infty).$$

La fonction opérationnelle $a(\lambda)$ est par définition *continue* sur l'intervalle $a \leqslant \lambda \leqslant b$ si existe un représentant (F, G) de la classe $\frac{F}{G}$ tel que les deux fonctions $F(t; \lambda)$ et $G(t; \lambda)$ soient continues en les variables λ et t dans le domaine $a \leqslant \lambda \leqslant b$, $0 < t < +\infty$. Par exemple, la fonction opérationnelle $e^{-\lambda p}$ est continue sur $[0, 1]$. On remarquera que la continuité d'une fonction opérationnelle sur $[a, b]$ ne signifie pas que tous ses représentants, i.e. les couples (F, G), sont constitués de fonctions continues.

§ 8. Limite d'une suite d'opérateurs. Limite d'une fonction opérationnelle

On dit qu'une suite d'opérateurs $a_n \in \mathfrak{M}$ est *convergente* vers un opérateur $a = \frac{F}{G}$ si existent des représentants (F_n, G_n) tels que

1) $a_n = \frac{F_n}{G_n}$;

2) les suites $F_n(t)$ et $G_n(t)$ convergent respectivement vers les limites $F(t)$ et $G(t)$ uniformément sur tout intervalle fini $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t), \quad \lim_{n\to\infty} G_n(t) = G(t).$$

On dit alors que l'opérateur $a = \frac{F}{G}$ est la *limite* de la suite d'opérateurs $a_n = \frac{F_n}{G_n}$ et l'on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{5.39}$$

On montre que la définition de la limite ne dépend pas du choix des représentants.

Citons deux exemples *). La suite $a_n = \cos nt$ est divergente au sens ordinaire de l'analyse classique. Au sens opérationnel, cette suite converge vers zéro. En effet,

$$a_n = \frac{\frac{\sin nt}{n}}{t}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nt}{n} = 0$$

et la convergence est uniforme. Donc, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Il en est de même de la suite

$$a_n = n \sin nt = \frac{t - \frac{\sin nt}{n}}{\frac{t^2}{2}}.$$

On a de toute évidence

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{t}{\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{t} = p.$$

Considérons maintenant la suite $a_n = ne^{nt}$. Il vient

$$a_n = ne^{nt} = \frac{t}{\frac{t}{n} - \frac{t^2}{2}},$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} ne^{nt} = \frac{t}{-\frac{t^2}{2}} = -p.$$

Donc au sens opérationnel, la suite ne^{nt} converge vers l'opérateur $-p$.

*) On rappelle que dans ces exemples et dans les suivants, la multiplication et la division sont effectuées sur le corps $\mathfrak{M}$.

Propriétés fondamentales de la limite d'une suite. Si une suite a_n est convergente vers une limite, chacune de ses suites partielles convergera vers la même limite.

Si existent $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, alors les suites $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n b_n$ possèdent également des limites telles que

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \quad \lim_{n \to \infty} a_n b_n = ab.$$

En particulier, si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ et c est un opérateur quelconque, alors

$$\lim_{n \to \infty} c a_n = ca.$$

Si $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b \neq 0$, alors

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

En se servant de la limite d'une suite d'opérateurs, on peut introduire la notion de limite d'une fonction opérationnelle. Plus exactement, une fonction opérationnelle $a(\lambda)$ admet une limite au point $\lambda = \lambda_0$ si quelle que soit la suite λ_n convergente vers λ_0 existe la limite $\lim\limits_{n \to \infty} a(\lambda_n)$ et cette limite ne dépend pas du choix de la suite $\lambda_n \to \lambda_0$. Donc elle ne peut dépendre que du point λ_0. Dans ce cas on écrit

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} a(\lambda) = b.$$

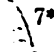
C o r o l l a i r e. *Si la fonction opérationnelle $a(\lambda)$ est continue sur l'intervalle $a \leqslant \lambda \leqslant b$, alors existera $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} a(\lambda) = a(\lambda_0)$ quel que soit $\lambda = \lambda_0$.*

§ 9. Dérivée continue d'une fonction opérationnelle. Intégrale d'une fonction opérationnelle

Si une fonction opérationnelle $a(\lambda)$, $a \leqslant \lambda \leqslant b$, admet un représentant $(F(t, \lambda), G(t, \lambda))$ tel que :

1) les fonctions $F(t, \lambda)$ est $G(t, \lambda)$ soient dérivables par rapport à λ, $a \leqslant \lambda \leqslant b$, et les dérivées $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = F_\lambda(t, \lambda)$ et $\frac{\partial G}{\partial \lambda} = G_\lambda(t, \lambda)$ appartiennent à l'ensemble M ;

2) les fonctions $F_\lambda(t, \lambda)$ et $G_\lambda(t, \lambda)$ soient continues en t et λ dans le domaine $0 < t < +\infty$, $a \leqslant \lambda \leqslant b$, alors on dit que la fonction $a(\lambda)$ est *continûment dérivable* sur l'intervalle $a \leqslant \lambda \leqslant b$. On appelle *dérivée continue* d'une fonction opérationnelle dans $\mathfrak{M}$ la classe dont un représentant est le couple $(F_\lambda * G - F * G_\lambda, G * G)$.



La dérivée est désignée par $a'(\lambda)$ ou $\frac{da(\lambda)}{d\lambda}$. Donc,

$$a'\lambda = \frac{F_\lambda G - FG_\lambda}{G^2}. \tag{5.40}$$

On montre que la définition de la dérivée ne dépend pas du choix du représentant de la classe.

Propriétés de la dérivée:

1°. $[a(\lambda)+b(\lambda)]' = a'(\lambda)+b'(\lambda)$.

2°. $[Ca(\lambda)]' = Ca'(\lambda)$, C est un opérateur constant.

3°. $[a(\lambda)\,b(\lambda)]' = a'(\lambda)\,b(\lambda)+a(\lambda)\,b'(\lambda)$.

4°. $\left[\frac{a(\lambda)}{b(\lambda)}\right]' = \frac{a'(\lambda)\,b(\lambda)-a(\lambda)\,b'(\lambda)}{b^2(\lambda)}$.

5°. Si $a'(\lambda) = 0$ lorsque $a \leqslant \lambda \leqslant b$, alors $a(\lambda) = a(\mu)$ pour tous les $a \leqslant \lambda < \mu \leqslant b$. Cette propriété a été démontrée en 1962 par L. Berg [12] sous certaines hypothèses. On n'en connaît pas encore la démonstration dans le cas général.

Définition de l'intégrale d'une fonction opérationnelle. Si pour une fonction opérationnelle donnée $a(\lambda)$ il existe une fonction opérationnelle $A(\lambda)$ telle que sur l'intervalle $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$ $A(\lambda)$ possède une dérivée continue $A'(\lambda)$ et $A'(\lambda) = a(\lambda)$, alors l'opérateur $A(\lambda)$ est appelé *intégrale indéfinie de la fonction opérationnelle* $a(\lambda)$, ce qu'on note $\int a(\lambda)\,d\lambda$. La propriété 5° entraîne que la fonction $A(\lambda)$ est définie à un opérateur constant près. On appelle *intégrale définie de la fonction opérationnelle* $a(\lambda)$, l'opérateur

$$\int_\alpha^\beta a(\lambda)\,d\lambda = A(\beta)-A(\alpha).$$

L'intégrale d'une fonction opérationnelle possède des propriétés analogues à celles de l'intégrale ordinaire. En effet,

1°. $\int_\alpha^\alpha a(\lambda)\,d\lambda = 0$.

2°. $\int_\alpha^\beta a(\lambda)\,d\lambda = -\int_\beta^\alpha a(\lambda)\,d\lambda$.

3°. $\int_\alpha^\beta a(\lambda)\,d\lambda = \int_\alpha^\gamma a(\lambda)\,d\lambda + \int_\gamma^\beta a(\lambda)\,d\lambda$.

4°. $\int_\alpha^\beta ca(\lambda)\,d\lambda = c\int_\alpha^\beta a(\lambda)\,d\lambda$, où c est un opérateur ne dependant pas de λ.

5°. $\int\limits_{\alpha}^{\beta} [a(\lambda)+b(\lambda)]\,d\lambda = \int\limits_{\alpha}^{\beta} a(\lambda)\,d\lambda + \int\limits_{\alpha}^{\beta} b(\lambda)\,d\lambda.$

6°. Si $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ possèdent des dérivées continues sur l'intervalle $a \leqslant \lambda \leqslant b$, alors $\int\limits_{\alpha}^{\beta} a'(\lambda)\,b(\lambda)\,d\lambda = a(\beta)\,b(\beta) - a(\alpha)\,b(\alpha) - \int\limits_{\alpha}^{\beta} a(\lambda)\,b'(\lambda)\,d\lambda.$

Enfin, on peut introduire les *intégrales impropres* en posant

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty} a(\lambda)\,d\lambda = \lim_{\beta\to\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} a(\lambda)\,d\lambda,$$

où la limite est comprise au sens opérationnel, i.e. pour toute suite de nombres $\beta_n \to \infty$, existe la limite de la suite d'opérateurs $\int\limits_{\alpha}^{\beta_n} a(\lambda)\,d\lambda$ et cette limite ne dépend pas du choix de la suite de nombres β_n.

§ 10. Fonctions en escalier

D é f i n i t i o n. On dit qu'une fonction $f(t)$, $0 \leqslant t + \infty$ est *en escalier* si l'on peut partager la section $]\,0, +\infty\,[$ en un nombre

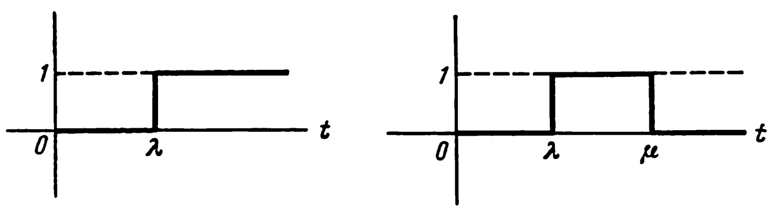


Fig. 4 Fig. 5

fini ou dénombrable d'intervalles disjoints à l'intérieur desquels a fonction $f(t)$ reste constante.

Exemple

$$e^{-p\lambda} = \begin{cases} 0, & 0 < t < \lambda, \\ 1, & \lambda \leqslant t. \end{cases} \tag{5.41}$$

Le graphe de cette fonction est représenté sur la fig. 4.

Formons l'opérateur $e^{-p\lambda} - e^{-p\mu}$, $\mu > \lambda$. Il est évident que

$$e^{-p\lambda} - e^{-p\mu} = \begin{cases} 0, & \text{pour } 0 < t < \lambda, \\ 1, & \text{pour } \lambda \leqslant t < \mu, \\ 0, & \text{pour } \mu \leqslant t. \end{cases}$$

Cette fonction (fig. 5) est également en escalier. Soit $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ une suite monotonément croissante de nombres réels, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ et $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ une suite quelconque de nombres réels. Il est aisé d'établir que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{-\lambda_n p} = \varphi(t)$$

est toujours convergente. Sa somme est une fonction en escalier. En effet, quel que soit t fixe, on peut toujours exhiber un entier N tel que $\lambda_N \leqslant t < \lambda_{N+1}$. De (5.41) il résulte alors

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

lorsque $\lambda_N \leqslant t < \lambda_{N+1}$ et en particulier $\varphi(t) = u_0$ lorsque $0 < < t < \lambda_1$. Réciproquement, si est donnée une fonction en escalier $\varphi(t)$ et que la fonction $\varphi(t)$ soit égale à φ_k à l'intérieur des intervalles] λ_k, λ_{k+1} [$(k = 0, 1, 2, \ldots)$, alors de (5.41) il s'ensuit

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k (e^{-\lambda_k p} - e^{-\lambda_{k+1} p}). \tag{5.42}$$

Ainsi l'ensemble des fonctions réelles en escalier coïncide avec l'ensemble de tous les opérateurs de la forme $\sum_k u_k e^{-\lambda_k p}$, où $0 = = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \lambda_n \to \infty$ et u_k sont des réels. Dans les applications on rencontre très souvent des séries dans lesquelles les nombres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ forment une progression arithmétique $\lambda_k = = kh$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Dans ce cas,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-khp}.$$

En particulier, si $u_k = 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, alors

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-khp} = (1 - e^{-ph})^{-1}. \tag{5.43}$$

Le graphe de cette fonction est représenté sur la figure 6. Si $\varphi(t)$ est une fonction h-périodique, la représentation opérationnelle de cette fonction sera

$$\overline{\varphi}(p) = p(1 - e^{-ph})^{-1} \int_0^h \varphi(t) e^{-pt} dt = p\varphi_h^*(p)(1 - e^{-ph})^{-1}.$$

L'ensemble de toutes les fonctions h-périodiques sur la section $0 \leqslant t < +\infty$ se confond avec l'ensemble de tous les opérateurs de

la forme

$$(1-e^{-ph})^{-1}\,\overline{\varphi}_h(p),$$

où

$$\overline{\varphi}_h(p)=p\int_0^h \varphi(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

En introduisant la nouvelle variable $t^*=\frac{t}{h}$, on peut toujours réduire le nombre h à l'unité. Supposons que $[t]$ désigne le plus grand

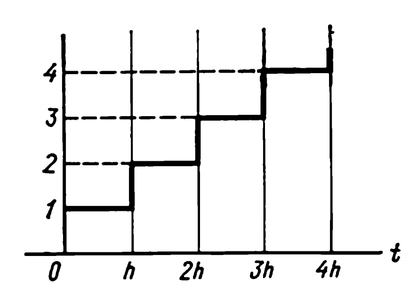


Fig. 6

entier positif non supérieur à t. A toute fonction continue $f(t)$, on peut associer la fonction en escalier $f([t])$ que l'on notera $f[t]$ pour abréger. Si le graphe de $f(t)$ est connu, on construit aisément

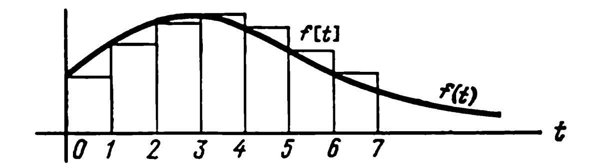


Fig. 7

celui de $f[t]$ (cf. fig. 7). Il est évident que

$$f[t]=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\,(e^{-kp}-e^{-(k+1)p})=(1-e^{-p})\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\,e^{-kp}. \quad (5.44)$$

En posant $f[t]=e^{\lambda[t]}$ dans (5.44), on obtient

$$e^{\lambda[t]}=(1-e^{-p})\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(p-\lambda)}=\frac{e^p-1}{e^p-e^{\lambda}}.$$

Une dérivation par rapport à λ nous donne

$$[t]\, e^{\lambda[t]} = \frac{(e^p-1)\, e^{\lambda}}{(e^p-e^{\lambda})^2}, \quad \text{ou} \quad [t]\, e^{\lambda([t]-1)} = \frac{e^p-1}{(e^p-e^{\lambda})^2}.$$

En répétant cette opération, on obtient

$$\frac{[t]\,([t]-1)\ldots([t]-k+1)\, e^{\lambda([t]-k)}}{k\,!} = \frac{e^p-1}{(e^p-e^{\lambda})^{k+1}},$$

ou

$$\frac{[t]\,[t-1]\ldots[t-k+1]\, e^{\lambda[t-k]}}{k\,!} = \frac{e^p-1}{(e^p-e^{\lambda})^{k+1}}. \tag{5.45}$$

Désignons spécialement l'opérateur $1-e^{-p}$ par

$$\nabla = 1-e^{-p}. \tag{5.46}$$

Si $f(t)=0$ lorsque $t \leqslant 0$, alors

$$\nabla f\,[t] = f\,[t] - f\,[t-1].$$

Sinon $\nabla f(t) = f\,[t] - f\,[t-1]$ lorsque $t \geqslant 1$ et $\nabla f\,[t] = f(0)$ lorsque $0 \leqslant t < 1$. S'agissant de l'opérateur inverse $\frac{1}{\nabla} = \nabla^{-1}$, on a

$$\nabla^{-1} f\,[t] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kp} f\,[t] = \sum_{k=0}^{[t]} f(k). \tag{5.47}$$

Supposons que

$$\overline{f}(p) = \nabla \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, e^{-kp} \quad \text{et} \quad \overline{g}(p) = \nabla \sum_{k=0}^{\infty} g(k)\, e^{-kp},$$

donc si

$$\overline{f}(p) = f\,[t] \quad \text{et} \quad \overline{g}(p) = g(t),$$

alors

$$\nabla^{-1} \overline{f}(p)\, \overline{g}(p) = (1-e^{-p}) \sum_{r=0}^{\infty} e^{-rp} \sum_{k+n=r} f(k)\, g(n),$$

d'où

$$\nabla^{-1} \overline{f}(p)\, \overline{g}(p) = \sum_{k=0}^{[t]} f(k)\, g\,[t-k] = \sum_{k=0}^{[t]} f\,[t-k]\, g(k),$$

ou

$$\overline{f}(p)\, \overline{g}(p) = \nabla \sum_{k=0}^{[t]} f\,[k]\, g\,[t-k]. \tag{5.48}$$

Ensuite on a

$$f[t+n]=(1-e^{-p})\sum_{=0}^{\infty} f(k+n)\,e^{-pk}=(1-e^{-p})\sum_{r=n}^{\infty} f(r)\,e^{-p(r-n)}=$$
$$=e^{pn}\overline{f}(p)-(1-e^{-p})\,[e^{np}f(0)+$$
$$+e^{(n-1)p}f(1)+\ldots+e^{p}f(n-1)]. \qquad (5.49)$$

Enfin de (5.42) il s'ensuit

$$f[t\lambda]=(1-e^{-\frac{p}{\lambda}})\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\,e^{-\frac{pk}{\lambda}}. \qquad (5.50)$$

Les formules (5.46), (5.48), obtenues à partir de la théorie générale du calcul opérationnel, auraient pu servir de point de départ pour l'élaboration du calcul opérationnel des fonctions à argument entier, i.e. des fonctions définies uniquement aux points 0, 1, 2, 3, . . . Au lieu de l'opérateur de dérivation p on considère l'opérateur aux différences ∇. Son inverse, l'opérateur ∇^{-1}, désigne la sommation. Au lieu des fonctions puissances t^k il est plus commode d'introduire les fonctions factorielles

$$t^{(k)}=t\,(t+1)\ldots(t+k-1),\quad t^{(0)}=1. \qquad (5.51)$$

On établit sans peine que

$$\nabla\,[t]^{(n)}=n\,[t]^{(n-1)},\quad a>1. \qquad (5.52)$$

D'où il vient

$$\nabla^{n-1}\,[t]^{(n)}=n\,!\,[t].$$

Mais de (5.43)

$$[t]=\frac{e^{-p}}{1-e^{-p}},$$

donc

$$\frac{e^{-p}}{\nabla^{n}}=\frac{[t]^{(n)}}{n\,!}=\frac{e^{-p}\,[t+1]^{(n)}}{n\,!}. \qquad (5.53)$$

De (5.53) il résulte pour $|\lambda|<1$

$$\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\nabla}\right)^{n}=\sum_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{n}\,[t+1]^{(n)}}{n\,!}$$

ou

$$\frac{\nabla}{\nabla-\lambda}=(1-\lambda)^{-[t+1]}. \qquad (5.54)$$

De (5.44) il vient

$$\nabla\sum_{k=0}^{\infty}(1-\nabla)^{k}f(k)=f[t]. \qquad (5.55)$$

En posant $f(k)=\frac{\lambda^k}{k!}$ on trouve

$$\nabla e^{-\nabla\lambda}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{[t]}}{[t]\,!}. \tag{5.56}$$

Si l'on use des tables des transformations intégrales de Laplace, on peut à partir de (5.56) déduire de nouvelles formules. En effet, en multipliant (5.56) par $f(\lambda)$ et en intégrant sur λ entre 0 et $+\infty$, on aura

$$\nabla\int\limits_0^\infty e^{-\nabla\lambda}f(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{[t]\,!}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{[t]}f(\lambda)\,d\lambda. \tag{5.57}$$

Cette formule est valable si existe l'intégrale du second membre. Par exemple, en posant $f(\lambda)=e^{\xi\lambda}$, $|\xi|<1$, il vient

$$\frac{\nabla}{\nabla-\xi}=(1-\xi)^{-[t]-1}.$$

Cette égalité coïncide avec (5.54). On trouvera d'autres exemples dans [246], [146].

§ 11. Equations aux différences

Dans la théorie aux différences finies, outre l'opérateur

$$\nabla x\,[t]=x\,[t]-x\,[t-1] \tag{5.58}$$

on considère souvent les *opérateurs aux différences*

$$\Delta x\,[t]=x\,[t+1]-x\,[t], \tag{5.59}$$

$$\delta x\,[t]=x\left[t+\frac{1}{2}\right]-x\left[t-\frac{1}{2}\right]. \tag{5.60}$$

Pour chacun des opérateurs ∇, Δ et δ on peut composer une expression qui contiendra la variable indépendante $[t]$, l'opérateur aux différences et la fonction inconnue. Cette expression est appelée *équation aux différences*. Par exemple,

$$F\,\{[t],\ x\,[t],\ \Delta x\,[t],\ \ldots,\ \Delta^n x\,[t]\}=0,$$

où $x\,[t]$ est la fonction inconnue, s'appelle *équation aux différences d'ordre n à une fonction inconnue*. Si dans cette équation on exprime les valeurs de la fonction inconnue par la formule

$$\Delta^k x\,[t]=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}C_k^\nu x\,[t+\nu],$$

alors l'équation aux différences d'ordre n peut se mettre sous la forme

$$x\,[t+n]=\Phi\,\{[t],\ x\,[t]\ x\,[t+1],\ \ldots,\ x\,[t+n-1]\}. \tag{5.61}$$

Sa solution dépend des n valeurs initiales $x(0), x(1), \ldots, x(n-1)$. Si ces valeurs sont connues, à partir de (5.61) on définira successivement $x(n), x(n+1), \ldots$, etc. La méthode opérationnelle est très commode pour la résolution des équations aux différences linéaires à coefficients constants

$$x[t+n]+a_1x[t+n-1]+\ldots+a_{n-1}x[t+1]+a_nx[t]=f[t], \quad (5.62)$$

sous réserve que soient données les valeurs initiales de la fonction inconnue

$$x(0)=x_0,\ x(1)=x_1,\ \ldots,\ x(n-1)=x_{n-1}.$$

Pour passer de (5.62) à une équation opérationnelle posons

$$\bar{x}(p)=(1-e^{-p})\sum_{k=0}^{\infty}x(k)e^{-pk}=\nabla\sum_{k=0}^{\infty}x(k)e^{-pk},$$

$$\bar{f}(p)=(1-e^{p})\sum_{k=0}^{\infty}f(k)e^{-pk}=\nabla\sum_{k=0}^{\infty}f(k)e^{-pk},$$

et, en portant dans (5.62) l'expression de $x[t+n]$ (5.49), on obtient

$$\begin{aligned}\bar{x}(p)&(e^{np}+a_1e^{(n-1)p}+\ldots+a_{n-1}e^{p}+a_n)=\\ &=(1-e^{-p})\{(e^{np}+a_1e^{(n-1)p}+\ldots+a_{n-1}e^{p})x_0+\\ &\quad+(e^{(n-1)p}+a_1e^{(n-2)p}+\ldots+a_{n-2}e^{p})x_1+\ldots\\ &\quad\ldots+(e^{2p}+a_1e^{p})x_{n-2}+e^{p}x_{n-1}\}+\bar{f}(p).\end{aligned}$$

En désignant

$$\begin{aligned}L_0(e^p)&=e^{np}+a_1e^{(n-1)p}+\ldots+a_{n-1}e^{p}+a_n,\\ L_k(e^p)&=e^{(n-k)p}+a_1e^{(n-k-1)p}+\ldots+a_{n-k-1}e^{p},\\ L_{n-1}(e^p)&=e^p \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),\end{aligned}$$

il vient

$$\bar{x}(p)=(1-e^{p})\left\{\frac{L_0(e^p)}{L(e^p)}x_0+\frac{L_1(e^p)}{L(e^p)}x_1+\ldots+\frac{L_{n-1}(e^p)}{L(e^p)}x_{n-1}\right\}+ \\ +\frac{\bar{f}(p)}{L(e^p)}. \quad (5.63)$$

Donc,

$$x[t]=\frac{1}{L(e^p)}f[t]+(1-e^{-p})\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L_k(e^p)}{L(e^p)}x_k. \quad (5.64)$$

En posant

$$\frac{(1-e^{-p})L_k(e^p)}{L(e^p)}=\varphi_k(t),$$

on obtient

$$x[t] = \frac{1}{L(e^p)} f[t] + \sum_{k=0}^{n-1} x_k \varphi_k [t].$$

Le premier terme est la solution de l'équation (5.62) qui vérifie des conditions initiales nulles, $\varphi_k [t]$ la solution de l'équation (5.62) qui vérifie la condition $\varphi_k (r) = 0$ si $r \neq k$ et $\varphi_k (k) = 1$. On peut trouver une solution $x [t]$ à partir de (5.63) ou (5.64) en se servant directement du tableau et du théorème de convolution (cf. (5.48)). On peut également décomposer $\frac{1}{L(z)}$ en fractions simples ou se servir du théorème de développement. Parfois il est plus facile de trouver $x [t]$ en développant $\frac{1}{L(e^p)}$ en une série suivant les puissances de e^{-kp}. Ce développement commencera par le terme e^{-np}, i.e.

$$\frac{1}{L(e^p)} = e^{-np} + \ldots$$

Si l'on connaît ce developpement, il est aisé de déduire $x [t]$ à partir de (5.64).

Exemple. Soit à résoudre l'équation

$$x [t + 2] - 2x [t + 1] + x [t] = \sin \omega [t]$$

avec les conditions initiales $x [0] = 0$, $x [1] = 0$.

Il vient

$$\sin \omega [t] = (1 - e^{-p}) \sum_{k=0}^{\infty} \sin \omega k e^{-kp} = \frac{(e^p - 1) \sin \omega}{e^{2p} - 2e^p \cos \omega + 1},$$

$$L (e^p) = e^{2p} - 2e^p + 1 = (e^p - 1)^2.$$

Donc (cf. (5.63)), la solution s'écrit

$$x [t] = \frac{\sin \omega}{(e^p - 1) (e^{2p} - 2e^p \cos \omega + 1)}.$$

Décomposons cette expression en fractions simples

$$\frac{\sin \omega}{(e^p - 1) (e^{2p} - 2e^p \cos \omega + 1)} = \frac{A}{e^p - 1} + \frac{B}{e^p - e^{i\omega}} + \frac{C}{e^p - e^{-i\omega}}.$$

D'où

$$A = \frac{\sin \omega}{2 (1 - \cos \omega)}, \qquad B = - \frac{1 - \cos \omega + i \sin \omega}{4i (1 - \cos \omega)},$$

$$C = \frac{1 - \cos \omega - i \sin \omega}{4i (1 - \cos \omega)}.$$

Compte tenu de (5.44) et (5.47), on obtient

$$\frac{1}{e^p-e^\lambda}=\frac{e^{-p}}{1-e^{-p}}\,\frac{e^p-1}{e^p-e^\lambda}=e^{-p}\sum_{k=0}^{[t]}e^{\lambda[k]}=\sum_{k=0}^{[t-1]}e^{\lambda k}$$

pour $t \geqslant 1$. Donc, lorsque $t \geqslant 1$, on a

$$x[t]=\frac{\sin\omega}{2(1-\cos\omega)}[t]-\sum_{k=0}^{[t-1]}\frac{(1-\cos\omega)\sin k\omega+\sin\omega\cos k\omega}{2(1-\cos\omega)}$$

et $x(0)=0$.

De façon analogue on peut résoudre un système d'équations aux différences linéaires à coefficients constants [89], [146], [247].

§ 12. Transformation d'Efros

Pour la réalisation d'un opérateur on a parfois intérêt à se servir de la transformation d'Efros (cf. également chapitre II, § 3). Plus exactement, si $F(p) = \varphi(t)$ et $e^{-\xi q(p)}u(p)q(p) = \Phi(\xi;\ t)$, alors

$$u(p)F[q(p)]=\int_0^\infty \varphi(\xi)\Phi(\xi;\ t)\,d\xi.$$

Dans [64], Efros et Danilevski ont indiqué d'intéressantes applications de cette transformation. On peut se servir du théorème suivant pour justifier la transformation d'Efros.

Théorème 8. *Supposons que*

1) $\int_0^\infty |\varphi(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt<\infty,\quad \sigma_0\geqslant 0.$

2) $q(p)$ *est une fonction analytique, régulière dans le demi-plan* Re $p>\sigma_0$ *et vérifiant la condition* Re $q(p)\geqslant\sigma_0$ *lorsque* Re $p>\sigma_1>\sigma_0$.

Alors

$$\frac{F[q(p)]}{q(p)}=\frac{d}{dt}\int_0^\infty \Psi(\xi;\ t)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{5.65}$$

où

$$\Psi(\xi;\ t)=\frac{1}{p}e^{-\xi q(p)}.$$

De (5.65), il résulte

$$F[q(p)]=pq(p)\int_0^\infty \Psi(\xi;\ t)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{5.66}$$

Si l'opérateur $F[q(p)]$ se ramène à une fonction, on peut trouver cette dernière en se servant de (5.66).

L'opérateur $e^{-\xi q(p)}$ est souvent ramené à une fonction. Posons $e^{-\xi q(p)} = \psi(\xi;\ t)$. Alors, au lieu de (5.66) on aura

$$F[q(p)] = q(p) \int_0^\infty \psi(\xi;\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{5.67}$$

Dans certains cas, l'opérateur $q(p)$ peut être mis sous le signe d'intégration.

Au chapitre IX, § 1 figurent des exemples sur la transformation d'Efros.

§ 13. Equations différentielles opérationnelles

On appelle *équation différentielle opérationnelle d'ordre n* une expression

$$F\{\lambda;\ x(\lambda),\ x'(\lambda),\ \ldots,\ x^{(n)}(\lambda)\} = 0$$

contenant la variable indépendante λ, $\alpha < \lambda < \beta$, la fonction opérationnelle inconnue $x(\lambda)$ et ses dérivées $x'(\lambda)$, $x''(\lambda)$, . . ., $x^{(n)}(\lambda)$. Même les types les plus simples de ces équations, par exemple les équations linéaires

$$a_n(\lambda)\,x^{(n)}(\lambda) + a_{n-1}(\lambda)\,x^{(n-1)}(\lambda) + \ldots + a_0(\lambda)\,x(\lambda) = f(\lambda), \tag{5.68}$$

où les coefficients $a_0(\lambda)$, $a_1(\lambda)$, . . ., $a_n(\lambda)$ sont des opérateurs dépendant de la variable réelle λ, $\alpha < \lambda < \beta$, sont peu étudiés. Donc, ici on ne considérera que des équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$a_n x^{(n)}(\lambda) + a_{n-1} x^{(n-1)}(\lambda) + \ldots + a_0 x(\lambda) = f(\lambda), \tag{5.69}$$

où a_0, a_1, . . ., a_n sont des opérateurs constants arbitraires. En particulier, si les opérateurs a_0, a_1, . . ., a_n et $f(\lambda)$ sont des nombres, l'équation (5.69) se transforme en une équation différentielle ordinaire d'ordre n. La méthode de résolution de l'équation (5.69) coïncide avec les procédés standard de résolution des équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants. D'abord on commence par trouver la solution générale de l'équation homogène

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = 0 \tag{5.70}$$

sous la forme d'une fonction opérationnelle exponentielle $x(\lambda) = e^{\lambda w}$. L'opérateur w est déterminé à partir de l'équation caractéristique

$$a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \ldots + a_0 = 0. \tag{5.71}$$

Soient $w_1, w_2, \ldots, w_n$ les racines de l'équation (5.71). Formons les fonctions exponentielles

$$e^{\lambda w_1}, e^{\lambda w_2}, \ldots e^{\lambda w_n}. \tag{5.72}$$

Si ces fonctions sont construites, la solution générale de (5.70) sera l'opérateur

$$x(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda w_k},$$

où C_k sont des opérateurs arbitraires constants. Observons que a) les équations de la forme (5.71) ne sont pas toutes solubles sur le corps des opérateurs $\mathfrak{M}$, b) la fonction exponentielle $e^{\lambda w}$ n'existe pas pour tout opérateur w.

L'opérateur w s'appelle *logarithme* si existe la fonction exponentielle $e^{\lambda w}$. Par exemple, les opérateurs p et $\sqrt{p}$ sont des logarithmes, alors que ip ne l'est pas. Si l'opérateur est logarithme et racine de multiplicité r de l'équation (5.71), alors chaque fonction $e^{\lambda w}$, $\lambda e^{\lambda w}, \ldots, \lambda^{r-1} e^{\lambda w}$ est solution de l'équation (5.70). On distinguera trois types d'équations différentielles selon le nombre de racines des logarithmes. On dira qu'une équation différentielle est

1) *logarithmique* si toutes les racines de son équation caractéristique sont des logarithmes ;

2) *pure* si son équation caractéristisque ne possède aucune racine logarithme ;

3) *mixte* si existent des logarithmes parmi les racines de son équation caractéristique.

En général, le nombre des opérateurs constants arbitraires figurant dans la solution générale est égal à l'ordre de l'équation. S'agissant de l'équation (5.69), on a le théorème d'unicité

Théorème 9. *Etant donnés des opérateurs $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$ et un point λ_0 compris à l'intérieur de l'intervalle $\alpha < \lambda_0 < \beta$ il existe une fonction opérationnelle $x(\lambda)$ et une seule qui vérifie dans $]\alpha, \beta[$ l'équation* (5.69) *et les conditions $x(\lambda_0) = V_0, x'(\lambda_0) = V_1, \ldots \ldots, x^{(n-1)}(\lambda_0) = V_{n-1}$.*

Toute solution de l'équation (5.70) peut être obtenue à partir de la solution générale moyennant un choix adéquat des opérateurs $C_1, C_2, \ldots, C_n$. La résolution de l'équation non homogène (5.69) se ramène à celle de (5.70) si l'on connaît au moins une fonction $x_0(\lambda)$, solution de l'équation (5.69). Donc, pour résoudre l'équation non homogène, il suffit de trouver une fonction vérifiant (5.68), (5.69). D'une façon générale, il est difficile de trouver cette fonction. Dans certains cas, elle n'existe pas, dans d'autres, on peut la trouver assez facilement si le second membre de l'équation est de forme spéciale, en particulier, si $f(\lambda)$ est un polynôme ou une fonction exponentielle [165].

§ 14. Application du calcul opérationnel à la résolution des équations différentielles

Soit l'équation différentielle ordinaire d'ordre n à coefficients constants

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{n-1}(t)+\ldots+a_nx(t)=f(t), \qquad (5.73)$$
$$0\leqslant t<+\infty$$

avec les conditions initiales $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$, ..., $x^{(n-1)}(0)=$ $=x_{n-1}$. Appliquant la formule (cf. (5.11))

$$x^{(k)}(t)=p^k\left[x(t)-x(0)-\frac{1}{p}x'(0)-\ldots-\frac{1}{p^{k-1}}x^{(k-1)}(0)\right],$$

on peut mettre l'équation (5.73) sous la forme

$$L(p)\left[x(t)-x_0-\frac{x_1}{p}-\ \ldots\ -\frac{x_{n-1}}{p^{n-1}}\right]=$$
$$=f(t)-b_0-\frac{b_1}{p}-\ \ldots\ -\frac{b_{n-1}}{p^{n-1}}.$$

Ici

$$L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ \ldots\ +a_n,\ b_k=\sum_{s=k}^{n-1}x_sa_{n+k-s}$$
$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

d'où

$$x(t)=\frac{1}{L(p)}f(t)-\frac{1}{L(p)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{p^k}+x_0+\frac{x_1}{p}+\ \cdots\ +\frac{x_{n-1}}{p^{p-1}}. \qquad (5.74)$$

Cette formule donne l'expression de la solution de l'équation (5.73). On constate aussitôt que le second membre de (5.74) est une fonction n fois dérivable, vérifiant les conditions initiales. Si les conditions initiales sont nulles $x_0=x_1=\ldots=x_{n-1}=0$, la solution prend la forme remarquablement simple

$$x(t)=\frac{1}{L(p)}f(t).$$

Les équations différentielles à argument retardé se résolvent de façon aussi simple lorsque leurs coefficients sont constants

$$x^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^{(k)}(t-h_k)+g(t) \qquad (0\leqslant t<+\infty,\ h_k\geqslant 0).$$

Pour simplifier on supposera que les conditions initiales sont triviales, i.e. lorsque $t\leqslant 0$ on posera $x(t)=x'(t)=\ \ldots\ =x^{(n-1)}(t)=0$.

Puisque $x^{(k)}(t - h_k) = p^{(k)}e^{-h_k p}x(t)$ la solution est

$$x(t) = \frac{1}{p^n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k p^k e^{-h_k p}} g(t).$$

On montre que le second membre de cette expression est une fonction n fois dérivable, satisfaisant aux conditions initiales triviales [50].

Considérons une équation aux dérivées partielles dont les coefficients $a_{\mu\nu}(x)$ sont des fonctions numériques de la variable x

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}(x) \frac{\partial^{\mu+\nu} u(x, t)}{\partial x^\mu \partial t^\nu} = f(x, t). \tag{5.75}$$

Appliquant la formule (cf. (5.11))

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} u(x, t)}{\partial x^\mu \partial t^\nu} = p^\nu \frac{\partial^\mu u(x, t)}{\partial x^\mu} - p^\nu \frac{\partial^\mu u(x, 0)}{\partial x^\mu} - \\ - p^{\nu-1} \frac{\partial^{\mu+1} u(x, 0)}{\partial x^\mu \partial t} - \ldots - p \frac{\partial^{\mu+\nu-1} u(x, 0)}{\partial x^\mu \partial t^{\nu-1}},$$

on ramène l'équation à la forme

$$\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu(x; p) \frac{\partial^\mu u(x, t)}{\partial x^\mu} = f(x, t) + \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{\nu-1} p^{\nu-k} \frac{\partial^{\mu+k} u(x, 0)}{\partial x^\mu \partial t^k},$$

où $a_\mu = a_\mu(x; p) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}(x) p^\nu$. Désignant le second membre de cette équation par $\Phi(x; p)$ et considérant $u(x, t)$ comme une fonction opérationnelle dépendant du paramètre x, $u(x, t) = \overline{u}(x; p) = \overline{u}(x)$, on obtient

$$a_m \overline{u}^{(m)}(x) + a_{m-1} \overline{u}^{(m-1)}(x) + \ldots + a_0 \overline{u}(x) = \Phi(x; p). \tag{5.76}$$

Les coefficients a_k sont ici également des fonctions opérationnelles dépendant de x. Donc, l'intégration de l'équation (5.75) se ramène à celle d'une équation différentielle opérationnelle linéaire. L'équation (5.76) s'appelle *équation transformée.* En résolvant l'équation (5.76), il importe de se servir de l'isomorphisme des corps $\mathfrak{M}$ et $\overline{\mathfrak{M}}$. Dans le corps $\overline{\mathfrak{M}}$, l'équation transformée (5.76) devient une équation différentielle linéaire ordinaire d'ordre n dont les coefficients et le second membre dépendent d'un paramètre p qui est un nombre complexe. Ces équations sont bien étudiées. Soit $\overline{u}(x; p)$ une solution de cette équation. Si $\overline{u}(x; p) \in \overline{\mathfrak{M}}$ pour des valeurs

données de x, $\alpha < x < \beta$, cela traduit le fait que l'équation (5.75) possède dans le corps $\mathfrak{M}$ la solution $\bar{u}(x; p)$, où p est l'opérateur $p = \frac{1}{t}$.

Appliquer le calcul opérationnel à la résolution des équations aux dérivées partielles, c'est :

1) Remplacer l'équation initiale par l'équation transformée. De façon analogue les conditions aux limites sont remplacées par les conditions aux limites transformées qui seront conditions aux limites pour la solution de $\bar{u}(x; p)$ de l'équation transformée (5.76).

2) Trouver la solution $\bar{u}(x; p)$ de l'équation transformée qui vérifie les conditions aux limites transformées.

3) Etudier la solution obtenue dans le but d'établir son appartenance au corps $\mathfrak{M}$. Si $\bar{u}(x; p) \in \mathfrak{M}$ il faut voir si la solution n'est pas solution généralisée, ou si elle peut être ramenée à une fonction possédant des dérivées partielles par rapport à x et t jusqu'à $\frac{\partial^{m+n} u(x, t)}{\partial x^m \partial t^n}$ comprise. Ce dernier fait signifiera que $u(x, t)$ vérifie l'équation initiale aux dérivées partielles au sens classique.

4) Réaliser l'opérateur $\bar{u}(x; p)$, i.e. définir la fonction $u(x, t) = \bar{u}(x; p)$.

L'étude du 3) peut être singulièrement simplifié si 4) est réalisé.

5) Démontrer que la solution $u(x, t)$ vérifie les conditions initiales et aux limites du problème.

A titre d'exemple, considérons les équations

$$\rho(x) u_t = \rho_0(x) u_{xx} + \rho_1(x) u_x + \rho_2(x) u, \tag{5.77}$$

$$\rho(x) u_{tt} = \rho_0(x) u_{xx} + \rho_1(x) u_x + \rho_2(x) u \tag{5.78}$$

dans le domaine $0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$, $\rho(x)$, $\rho_0(x)$, $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ étant des fonctions continues données sur l'intervalle $0 < x \leqslant l$ et $\rho(x) > 0$. La solution $u(x, t)$ doit posséder dans le domaine $(0 < x \leqslant l$, $t > 0)$ des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre compris et satisfaire aux conditions initiales

$$\lim_{t \to +0} u(x, t) = \varphi(x), \quad 0 < x \leqslant l,$$

dans le cas de l'équation (5.77) et

$$\lim_{t \to +0} u(x, t) = \varphi(x), \quad \lim_{t \to +0} u_t(x, t) = \psi(x), \quad 0 < t \leqslant l,$$

dans le cas de l'équation (5.78), ainsi qu'aux conditions aux limites

$$\lim_{x \to +0} u(x, t) = f(t), \quad au_x(l, t) + bu_t(l, t) = cu(l, t) \tag{5.79}$$

pour $t > 0$, où $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont des fonctions continues par morceaux données ; $f(t) \in S$ et est continue pour $t > 0$; a, b, c des constantes

données. On cherchera la solution de ces équations sous la forme $u(x, t) = \overline{u}(x; p)$. Les équations transformées de (5.77) et (5.78) s'écrivent

$$\rho_0(x)\frac{d^2\overline{u}}{dx^2} + \rho_1(x)\frac{d\overline{u}}{dx} + [\rho_2(x) - p\rho(x)]\,\overline{u} = -\rho(x)\,p\varphi(x), \qquad (5.80)$$

$$\rho_0(x)\frac{d^2\overline{u}}{dx^2} + \rho_1(x)\frac{d\overline{u}}{dx} + [\rho_2(x) - p^2\rho(x)]\,\overline{u} = $$
$$= -p^2\rho(x)\,\varphi(x) - p\rho(x)\psi(x). \qquad (5.81)$$

Les conditions aux limites du problème nous donnent les conditions aux limites de la solution

$$\left.\begin{array}{l}\overline{u}(+0;\ p) = \overline{f}(p),\ \text{où}\ \overline{f}(p) = f(t).\\ a\overline{u}_x(l;\ p) + bp\,[\overline{u}(l;\ p) - \varphi(l)] = c\overline{u}(l;\ p).\end{array}\right\} \qquad (5.82)$$

Théorème 10. *Supposons que* $\overline{u}(x; p)$ *est solution de l'équation* (5.80) *ou* (5.81) *avec la condition* (5.82). *Supposons que par ailleurs:*

1) *Les opérateurs* $\overline{u}(x; p)$, $\overline{u}_x(x; p)$ *et* $\overline{u}_{xx}(x; p)$ *sont réalisables pour* $0 < x \leqslant l$.

2) *Qu'existe un nombre* σ_0 *tel que lorsque* $t \to \infty$ *soient remplies les conditions*

$$\overline{u}(x;\ p) = O(e^{\sigma_0 t}),\ \overline{u}_x(x;\ p) = O(e^{\sigma_0 t}),\ \overline{u}_{xx}(x;\ p) = O(e^{\sigma_0 t})$$

uniformément en x *sur tout intervalle* $\varepsilon \leqslant x \leqslant l$.

3) *Qu'existe un entier* $k \geqslant 0$ *tel que*

$$|\,p^{-k}\overline{u}(x;\ p)\,| < Q = \text{const}$$

pour tous les $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon < l$, $\operatorname{Re} p > \sigma_1 > \sigma_0$.

4) *Qu'existe* $\lim\limits_{t\to+0} \overline{u}(x; p) = g(t)$, $t > 0$ *où* $g(t)$ *est une fonction continue pour* $t > 0$ *et bornée lorsque* $t \to 0$.

Alors $u(x; t) = \overline{u}(x; p)$ *est la solution de l'équation* (5.77) *ou* (5.78) *qui vérifie les conditions aux limites et les conditions initiales.*

Examinons un exemple. Trouver la solution de l'équation

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

qui dans le domaine ($0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$) vérifie les conditions initiales $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ et les conditions aux limites $u(0, t) = 0$, $Eu_x(l, t) = A \sin \omega t$, où E, ω et A sont des constantes.

L'équation transformée s'écrit

$$\frac{d^2\overline{u}}{dx^2} = \frac{p^2}{a^2}\,\overline{u}\,;$$

les conditions aux limites pour $\bar{u}(x;\ p)$ sont

$$\bar{u}(0;\ p)=0, \quad E\bar{u}_x(l;\ p)=\frac{\omega p}{p^2+\omega^2}.$$

La solution de l'équation transformée qui vérifie les conditions aux limites est de la forme

$$\bar{u}(x;\ p)=\frac{b}{p^2+\omega^2}\frac{\operatorname{sh}\frac{px}{a}}{\operatorname{ch}\frac{pl}{a}}, \quad b=\frac{\omega a A}{E},$$

d'où

$$u(x;\ t)=\bar{u}(x;\ p)=\frac{Aa}{\omega E}\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\cos\frac{\omega l}{a}}+\frac{2b}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k_n}\frac{\sin k_n x\cdot\sin k_n at}{\omega^2-k_n^2a^2},$$

où

$$k_n=\frac{\pi}{l}\left(n-\frac{1}{2}\right) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),\ \omega\neq ak_n.$$

§15. Séries asymptotiques

D'après une définition de Poincaré, on dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ est le *développement asymptotique d'une fonction* $s(z)$ dans un domaine donnée des valeurs de arg z si, quel que soit N

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{s(z)-\sum_{n=0}^{N}u_n(z)}{u_N(z)}=0.$$

En particulier, la représentation asymptotique d'une fonction $f(t)$ par la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{t^n}$ voudra dire que, quel que soit N,

$$\lim_{t\to\infty}t^N\left(f(t)-\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{t^n}\right)=0.$$

Le développement asymptotique est d'un usage commode lorsqu'il s'agit de calculer les valeurs d'une fonction pour des valeurs élevées de l'argument. Aussi dans le calcul opérationnel des opérateurs se ramenant à des fonctions est-il important de construire le développement asymptotique d'une fonction d'après sa représentation opérationnelle. Dans de nombreux cas, la représentation asymptotique de fonctions transformables-Laplace peut être obtenue à l'aide du théorème suivant [246].

Théorème 11. *Supposons que* $\overline{f}(p) \risingdotseq f(t)$ *et*

1) $\overline{f}(p)$ *possède des points singuliers isolés (des pôles et des points de branchement),*

2) *dans le demi-plan* Re $p < 0$ *la fonction* $\frac{\overline{f}(p)}{p}$ *tend uniformément vers zéro p en arg p lorsque* $|p| \to \infty$,

3) *le nombre des points singuliers* $p = p_s$ *de plus grande partie réelle est fini* ($s = 1, 2, \ldots, l$) *et le développement de* $\frac{\overline{f}(p)}{p}$ *au voisinage de* $p = p_s$ *est donnée par la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(s)} (p-p_s)^{\lambda_k^{(s)}} \quad (-N_s < \lambda_0^{(s)} < \lambda_1^{(s)} < \ldots < \lambda_n^{(s)} \to \infty).$$

Ceci étant, la représentation asymptotique de $f(t)$ *sera*

$$f(t) \sim \sum_{s=1}^{l} e^{p_s t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^{(s)}}{\Gamma(-\lambda_k^{(s)})\, t^{\lambda_k^{(s)}+1}},$$

où

$$\frac{1}{\Gamma(-\lambda_k^{(s)})} = 0, \quad \textit{lorsque } \lambda_k^{(s)} = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

Si, par exemple, tous les points singuliers de la fonction $\frac{\overline{f}(p)}{p}$, à l'exception de $p = 0$, possèdent une partie réelle négative et que l'origine des coordonnées soit un point de branchement de premier ordre et enfin que $\frac{\overline{f}(p)}{p}$ admette au voisinage de $p = 0$ le développement

$$\frac{\overline{f}(p)}{p} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^{\frac{n}{2}-1},$$

alors

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}+1\right) t^{\frac{n}{2}}}$$

ou

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{\sqrt{\pi t}\,(2t)^k} a_{2k+1}.$$

§ 16. Calcul opérationnel pour l'opérateur $B = \frac{d}{dt} t \frac{d}{dt}$

La théorie du calcul opérationnel repose sur la notion de convolution [165]. L'introduction de la convolution dans l'ensemble linéaire M (cf. § 1) confère à ce dernier une structure d'anneau commutatif sans diviseurs de zéro. Toute la théorie du calcul opérationnel de Mikusinski est basée sur ce fait. Dans ce paragraphe, en partant d'une nouvelle définition de la convolution on se propose d'élaborer un calcul opérationnel pour l'opérateur $B = \frac{d}{dt} t \frac{d}{dt}$. On procédera exactement comme pour l'opérateur $p = \frac{d}{dt}$. Soit L_1 l'ensemble de toutes les fonctions $f(t)$ définies sur la section $[0, +\infty[$, intégrables sur tout intervalle fini de cette section et vérifiant la condition

$$\int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi |f(t)|\, dt < \infty \qquad (5.83)$$

quel que soit $t_0 > 0$. Par exemple, la fonction $f(t) = \ln t$ appartient à L_1 contrairement à $f(t) = \frac{(t-1)^2}{t \ln^2 t}$ bien que $\frac{(t-1)^2}{t \ln^2 t} \in L$. Soit M_1 l'ensemble des fonctions de la forme

$$F(t) = \int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi f(u)\, du + C,$$

où $f(t)$ est une fonction quelconque de L_1 et C une constante arbitraire. Définissons dans l'ensemble L_1 la convolution des fonctions $f_1(t) \in L_1$ et $f_2(t) \in L_1$ à l'aide de la formule

$$f(t) = \int_0^t d\xi \int_0^t f_1(\eta\xi) f_2[(1-\eta)(t-\xi)]\, d\eta. \qquad (5.84)$$

On montre que la fonction $f(t)$ appartient à L_1. L'ensemble M_1 est un ensemble linéaire. Toute fonction appartenant à l'ensemble M_1 possède presque partout une dérivée seconde $F''(t)$. Appelons *produit des fonctions* $F_1(t)$ et $F_2(t)$ de M_1 l'expression

$$F_1(t) * F_2(t) = \frac{d}{dt} \left\{ t \frac{d}{dl} \int_0^t d\xi \int_0^1 F_1(\xi\eta) F_2[(1-\eta)(1-\xi)]\, d\eta. \qquad (5.85)\right.$$

Si

$$F_1(t) = \int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi f_1(\eta)\, d\eta, \quad F_2(t) = \int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi f_2(\eta)\, d\eta$$

et

$$f(t)=\int_0^t d\xi\int_0^1 f_1(\xi\eta)\,f_2[(1-\eta)(t-\xi)]\,d\eta,$$

on aura

$$F_1(t) * F_2(t)\int_0^t\frac{du}{u}\int_0^u f(v)\,dv. \qquad (5.86)$$

De là il s'ensuit que le produit de deux fonctions de M_1 appartient de nouveau à M_1. L'addition se définit de façon naturelle sur M_1. Il est aisé de vérifier que le produit défini au sens (5.85) est commutatif, associatif et distributif relativement à l'addition. Donc, l'ensemble M_1 possède une structure d'anneau commutatif relativement à l'addition et la multiplication. Cet anneau ne possède pas de diviseurs de zéro.

L'anneau M_1 peut donc être étendu à un corps de quotients que nous noterons $\mathfrak{M}_1$. Les éléments de $\mathfrak{M}_1$ seront appelés *opérateurs* et désignés, comme au § 1, par $\frac{F_1}{F_2}$. Donc, $\frac{F_1}{F_2}$ désigne une classe de couples équivalents. L'égalité des opérateurs $\frac{F_1}{F_2}$ et $\frac{G_1}{G_2}$ signifie que $F_1 * G_2=F_2 * G_1$. Si dans (5.85) la fonction $F_2(t)=\alpha$, où α est une constante, alors

$$\alpha * F_1(t)=\alpha\frac{d}{dt}\left\{t\frac{d}{dt}\int_0^t d\xi\int_0^1 F_1(\xi\eta)\,d\eta\right\}=$$

$$=\alpha\frac{d}{dt}\left\{t\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{d\xi}{\xi}\int_0^\xi F_1(u)\,du\right\}=\alpha F_1(t).$$

Donc, sur M_1 le produit d'un nombre par une fonction coïncide avec le produit ordinaire d'un nombre par une fonction. Si dans (5.85) les deux facteurs sont des nombres, alors le produit au sens (5.85) est confondu avec le produit ordinaire de deux nombres. De là il résulte que les opérateurs de la forme $\frac{F(t)}{\alpha}$ peuvent être identifiés aux fonctions $\frac{1}{\alpha}F(t)$; en particulier, les opérateurs $\frac{F(t)}{1}$ se confondent avec les fonctions $F(t)$ de M_1. Dans ce cas, on écrira

$$\frac{F(t)}{1}=F(t),\quad F(t)\in M_1.$$

Enfin, les opérateurs de la forme $\frac{F(t)}{t}$, $F(0)=0$, s'identifient à des fonctions de L_1. Plus exactement, à tout opérateur $\frac{F(t)}{t}$,

$F(t) \in M_1$ et $F(0) = 0$, associons une fonction $f(t)$ telle que

$$\frac{F(t)}{t} = f(t), \tag{5.87}$$

où

$$F(t) = \int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi f(u)\, du.$$

Réciproquement, à toute fonction $f(t) \in L_1$ correspond un opérateur $\frac{F(t)}{t}$. Cette correspondance est biunivoque. Si un opérateur est susceptible d'être ramené à la forme $\frac{F(t)}{t}$, $F(t) \in M_1$ et $F(0) = 0$, on dira que cet opérateur est une *fonction*. Désignons spécialement l'opérateur $\frac{1}{t}$ par

$$\frac{1}{t} = B. \tag{5.88}$$

Pour l'opérateur inverse $B^{-1} = \frac{1}{B}$, on aura

$$\frac{1}{B} = t. \tag{5.89}$$

Compte tenu de (5.87), on obtient pour les fonctions $F(t) \in M_1$ et $F(0) = 0$

$$BF(t) = \frac{d}{dt}\left(t\,\frac{dF(t)}{dt}\right) = (tF'(t))'$$

ou

$$BF(t) = tF''(t) + F'(t). \tag{5.90}$$

Donc, lorsque $F(t) \in M_1$ et $F(0) = 0$ le produit $BF(t)$ signifie que l'on peut appliquer à $F(t)$ l'opérateur $\frac{d}{dt}\,t\,\frac{d}{dt}$. Le produit de l'opérateur inverse $\frac{1}{B}$ par la fonction $f(t) \in L_1$, ainsi qu'il résulte de (5.89) et de l'égalité $F(t) = t * f(t)$, est égal à

$$\frac{1}{B} f(t) = \int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi f(u)\, du. \tag{5.91}$$

De (5.89) et (5.91) il s'ensuit que

$$\frac{1}{B^n} = \frac{t^n}{(n!)^2}. \tag{5.92}$$

Alors de (5.85) et (5.92) il résulte pour $f(t) \in L_1$

$$\frac{1}{B^{n+1}} f(t) = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^t (t-\xi)^n\, d\xi \int_0^1 f(\xi\eta)(1-\eta)^n\, d\eta. \tag{5.93}$$

L'équation

$$\frac{d}{dt}\left(t\frac{dy}{dt}\right)=\lambda y \tag{5.94}$$

admet pour solution les fonctions de Bessel $I_0(2\sqrt{\lambda t})$ et $K_0(2\sqrt{\lambda t})$. De (5.90) et (5.94) il s'ensuit que

$$B[I_0(2\sqrt{\lambda t})-1]=\lambda I_0(2\sqrt{\lambda t}),$$

d'où

$$\frac{B}{B-\lambda}=I_0(2\sqrt{\lambda t}). \tag{5.95}$$

En posant $\lambda=i\omega$ dans (5.95) et compte tenu de

$$I_0(2\sqrt{i\omega t})=\operatorname{ber}(2\sqrt{\omega t})+i\operatorname{bei}(2\sqrt{\omega t}),$$

on trouve

$$\frac{B^2}{B^2+\omega^2}=\operatorname{ber}(2\sqrt{\omega t}),\quad \frac{\omega B}{B^2+\omega^2}=\operatorname{bei}(2\sqrt{\omega t}). \tag{5.96}$$

De (5.95), on déduit

$$\frac{B}{B+\lambda}=J_0(2\sqrt{\lambda t}). \tag{5.97}$$

(5.95) et (5.96) entraînent

$$\left.\begin{aligned}\frac{B^2}{B^2-\lambda^2}&=\frac{1}{2}[I_0(2\sqrt{\lambda t})+J_0(2\sqrt{\lambda t})],\\ \frac{\lambda B}{B^2-\lambda^2}&=\frac{1}{2}[I_0(2\sqrt{\lambda t})-J_0(2\sqrt{\lambda t})].\end{aligned}\right\} \tag{5.98}$$

La plus grande partie de la théorie du calcul opérationnel, exposée dans les paragraphes précédents, est valable pour le corps des opérateurs $\mathfrak{M}_1$. En particulier, la définition de la fonction opérationnelle, de la limite d'une suite d'opérateurs et la notion de série opérationnelle, de la dérivation et de l'intégration d'une fonction opérationnelle se transposent sans changement au corps $\mathfrak{M}_1$. En se servant de cette théorie on peut par des méthodes connues compléter la table des valeurs des opérateurs (5.95) à (5.98). Par exemple, en dérivant (5.95) par rapport au paramètre λ, on trouve

$$\frac{B}{(B-\lambda)^{n+1}}=\frac{1}{n!}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}}I_n(2\sqrt{\lambda t}). \tag{5.99}$$

De (5.96), il vient

$$B\frac{\omega B}{B^2+\omega^2}=\frac{\omega B^2}{B^2+\omega^2}=\omega\operatorname{ber}(2\sqrt{\omega t}),$$

$$B\left(\frac{B^2}{B^2+\omega^2}-1\right)=-\frac{\omega^2 B}{B^2+\omega^2}=-\omega\frac{\omega B}{B^2+\omega^2}=-\omega\operatorname{bei}(2\sqrt{\omega t}).$$

D'où

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{t\frac{d}{dt}\operatorname{bei}(2\sqrt{\omega t})\right\} &= \omega \operatorname{ber}(2\sqrt{\omega t}),\\ \frac{d}{dt}\left\{t\frac{d}{dt}\operatorname{ber}(2\sqrt{\omega t})\right\} &= -\omega \operatorname{bei}(2\sqrt{\omega t}). \end{aligned}\right\} \quad (5.100)$$

Donc, les fonctions ber $(2\sqrt{\omega t})$ et bei $(2\sqrt{\omega t})$ se conduisent vis-à-vis de l'opérateur $\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}$ exactement comme cos ωt et sin ωt vis-à-vis de l'opérateur $\frac{d}{dt}$. Pour l'opérateur $B = \frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}$ on peut construire le calcul opérationnel à partir d'une transformation intégrale. L'analogue de la transformation de Laplace sera ici l'intégrale

$$f^*(B) = 2\int_0^\infty f(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt. \quad (5.101)$$

Si $f(t) \in L_1$ et vérifie la condition

$$|f(t)| \leqslant Qe^{2q_0\sqrt{t}}, \quad (5.102)$$

où Q et $q_0 > 0$ sont des constantes, alors dans le domaine Re $\sqrt{B} > q_0$ l'intégrale (5.101) est absolument convergente et représente une fonction analytique de la variable complexe B. Moyennant des hypothèses connues sur la fonction $f(t)$, on a la transformation inverse

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f^*(B)\,I_0(2\sqrt{Bt})\,dB, \quad (5.103)$$

où le chemin d'intégration L est une parabole quelconque Re $\sqrt{B} = q > q_0$. La formule (5.103) aura lieu, par exemple, si outre (5.102), la fonction $f(t)$ est assujettie à être à variation bornée au voisinage de tout point $t = t_0$ de la section $0 < t < +\infty$. Aux points de discontinuité, l'intégrale (5.103) est égale à $\frac{1}{2}\{f(t_0+0) + f(t_0-0)\}$.

Pour la transformation (5.101) on a le

Théorème 12. *Soient* $f_1(t)$ *et* $f_2(t)$ *des fonctions de* L_1 *vérifiant la condition* (5.102) (*chaque fonction possède ses propres constantes* Q *et* q_0 *dans* (5.102)). *Alors la fonction*

$$f(t) = \int_0^t d\xi \int_0^1 f_1(\xi\eta)\,f_2[(1-\eta)(t-\xi)]\,d\eta \quad (5.104)$$

appartient à L_1 *et remplit également une condition du genre* (5.102). *Si*

$$f_1^*(B) = 2\int_0^\infty f_1(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt,$$

$$f_2^*(B) = 2\int_0^\infty f_2(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt$$

et

$$f^*(B)=2\int_0^\infty f(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt,$$

alors

$$f^*(B)=f_1^*(B)\,f_2^*(B). \tag{5.105}$$

D é f i n i t i o n. Si pour un opérateur $a\in\mathfrak{M}_1$ il existe un représentant (F, G) tel que les fonctions $F(t)$ et $G(t)$ admettent la transformation (5.101), on dira que cet opérateur est *transformable-Bessel* et la fonction

$$\bar{a}(B)=\frac{\int_0^\infty F(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt}{\int_0^\infty G(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt} \tag{5.106}$$

transformée de Bessel de l'opérateur $a=\frac{F}{G}$. Notons $\mathfrak{N}_1$ l'ensemble de tous les opérateurs transformables-Bessel et $\overline{\mathfrak{N}}_1$ l'ensemble de leurs transformées de Bessel. Ces ensembles sont isomorphes entre eux. Cet isomorphisme envoie l'opérateur $B=\frac{1}{t}$ dans la fonction

$$\frac{\int_0^\infty K_0(2\sqrt{Bt})\,dt}{\int_0^\infty tK_0(2\sqrt{Bt})\,dt}=B.$$

Dans les calculs on peut se servir de la formule

$$2\int_0^\infty t^\mu K_0(2\sqrt{Bt})\,dt=\frac{\Gamma^2(\mu+1)}{B^{\mu+1}}. \tag{5.107}$$

Si l'opérateur a se ramène à une fonction, i.e.

$$a=\frac{F(t)}{t},\quad F(t)\in M_1,\quad F(0)=0,$$

alors

$$\bar{a}(B)=\frac{2\int_0^\infty F(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt}{2\int_0^\infty tK_0(2\sqrt{Bt})\,dt}=2B^2\int_0^\infty F(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt. \tag{5.108}$$

Comme

$$F(t)=\int_0^t \frac{d\xi}{\xi}\int_0^\xi f(u)\,du$$

et compte tenu de relations connues auxquelles satisfait une fonction de Bessel

$$\frac{d}{dx}(xK_1(x))=-xK_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}(K_0(x))=-K_1(x),$$

un double intégration par parties nous donne

$$\bar{a}(B)=2B\int_0^\infty f(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt. \tag{5.109}$$

On reconnaît un analogue de la transformation de Laplace-Carson. Moyennant cette transformation, on peut déduire de nouvelles formules pour l'opérateur $B=\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}$. L'égalité (5.109) veut dire que

$$\bar{a}\,(B)\;=\;f\,(t). \tag{5.110}$$

En particulier, si $f\,(t)\;=\;t^\nu$, alors de (5.107) et (5.108) on déduit une généralisation de la formule (5.92) à tout ordre ν

$$\frac{1}{B^\nu}=\frac{t^\nu}{\Gamma^2(1+\nu)}, \quad \operatorname{Re}\nu>-1. \tag{5.111}$$

Si $f(t)=e^{-at}$, il vient

$$\frac{B}{a}e^{\frac{B}{a}}\int_{\frac{B}{a}}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du=e^{-at}.$$

Citons quelques exemples d'application de la formule (5.108). Des calculs directs nous donnent

$$2B\int_0^\infty K_0(2\sqrt{\lambda t})\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt=\frac{B}{B-\lambda}\ln\sqrt{\frac{B}{\lambda}}.$$

Donc,

$$\frac{B}{B-\lambda}\ln\sqrt{\frac{B}{\lambda}}=K_0(2\sqrt{\lambda t}). \tag{5.112}$$

En utilisant l'intégrale connue

$$\int_0^\infty K_0(ax)\,J_\nu(bx)\,x^{\nu+1}\,dx=\frac{(2b)^\nu\,\Gamma(\nu+1)}{(a^2+b^2)^{\nu+1}},$$

on généralise la formule (5.99) à un ordre quelconque ν

$$\frac{B}{(B+\lambda)^{\nu+1}} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu (2\sqrt{\lambda t}). \tag{5.113}$$

En particulier de (5.113) on obtient pour $\nu = -\frac{1}{2}$

$$\frac{B}{\sqrt{B+\lambda}} = \frac{\cos 2\sqrt{\lambda t}}{\pi \sqrt{t}}. \tag{5.114}$$

En dérivant (5.111) par rapport à ν, on obtient

$$\frac{\ln B}{B^\nu} = \frac{t^\nu}{\Gamma^2(\nu+1)} \left[2 \frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} - \ln t\right]. \tag{5.115}$$

L'intégrale

$$\int_0^\infty K_0 (a\sqrt{x^2+z^2})\, x^{2\mu+1}\, dx = 2^\mu \left(\frac{z}{a}\right)^{1+\mu} \Gamma(1+\mu) K_{1+\mu}(az).$$

entraîne

$$\frac{1}{\Gamma(1+\mu)} 2B \int_\lambda^\infty (t-\lambda)^\mu K_0 (2\sqrt{Bt})\, dt = 2B \left(\frac{\lambda}{B}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} K_{1+\mu}(2\sqrt{\lambda B}),$$

d'où

$$2B \left(\frac{\lambda}{B}\right)^{\frac{1+\mu}{2}} K_{1+\mu}(2\sqrt{B\lambda}) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < \lambda, \\ \frac{(t-\lambda)^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \text{ si } \lambda < t \end{cases} \tag{5.116}$$

$$(\operatorname{Re} \mu > -1).$$

En particulier, lorsque $\mu = -\frac{1}{2}$, on déduit de (5.116)

$$\sqrt{B} e^{-2\sqrt{B\lambda}} = \begin{cases} 0 \text{ si } t < \lambda, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{t-\lambda}} \text{ si } \lambda < t. \end{cases} \tag{5.117}$$

Multipliant la dernière égalité par une fonction arbitraire $\varphi(\lambda)$ (au sens ordinaire) et intégrant sur λ entre 0 et ∞, on obtient

$$\sqrt{B} \int_0^{+\infty} e^{-2\sqrt{B\lambda}} \varphi(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\varphi(\lambda)\, d\lambda}{\sqrt{t-\lambda}}. \tag{5.118}$$

Posant $2\sqrt{\lambda} = \xi$ dans l'intégrale du premier membre, il vient

$$\sqrt{B} \int_0^\infty e^{-\xi\sqrt{B}} \varphi\left(\frac{\xi^2}{4}\right) \xi\, d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\varphi(\lambda)\, d\lambda}{\sqrt{t-\lambda}}. \tag{5.119}$$

En se servant des tables de l'intégrale de Laplace, on obtiendrait à partir de (5.119) de nombreuses nouvelles formules. Par exemple, si dans (5.118) on pose

$$\varphi(\lambda)=\frac{J_\nu(2\sqrt{a\lambda})}{\sqrt{\lambda}},$$

on trouve

$$\sqrt{B}\int_0^\infty e^{-\xi\sqrt{B}}J_\nu(\xi\sqrt{a})\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{J_\nu(2\sqrt{a\lambda})}{\sqrt{\lambda(t-\lambda)}}\,d\lambda$$

ou encore

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B+a}}\left\{\frac{\sqrt{B+a}-\sqrt{B}}{\sqrt{a}}\right\}^\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{J_\nu(2\sqrt{a\lambda})}{\sqrt{\lambda(t-\lambda)}}\,d\lambda.$$

Mais la dernière intégrale qui est une convolution au sens ordinaire peut être calculée par la transformation de Laplace (cf. [64] page 125). On aura

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B+a}}\left\{\frac{\sqrt{B+a}-\sqrt{B}}{\sqrt{a}}\right\}^\nu=J_{\frac{\nu}{2}}^2(\sqrt{at}). \tag{5.120}$$

En particulier, lorsque $\nu=0$

$$\sqrt{\frac{B}{B+a}}=J_0^2(\sqrt{at}). \tag{5.121}$$

En multipliant (5.121) par $\sqrt{B}=\frac{1}{\pi\sqrt{t}}$, il vient

$$\frac{B}{\sqrt{B+a}}=J_0^2(\sqrt{at})*\frac{1}{\pi\sqrt{t}},$$

ou compte tenu de (5.114) et (5.85)

$$\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\pi\sqrt{t}}=\frac{d}{dt}\left\{t\frac{d}{dt}\int_0^t d\xi\int_0^1 J_0^2(\sqrt{a\xi\eta})\frac{d\eta}{\pi\sqrt{(1-\eta)(t-\xi)}}\right\}.$$

Cette égalité peut être mise sous la forme

$$\frac{2}{\sqrt{a}}\int_0^{2\sqrt{at}}\frac{\sin u}{u}\,du=\int_0^t d\xi\int_0^1 J_0^2(\sqrt{a\xi\eta})\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta)(t-\xi)}}.$$

De façon analogue, en élevant (5.121) au carré et tenant compte de (5.97), on obtient

$$\frac{1-J_0(2\sqrt{at})}{a}=\int_0^t d\xi\int_0^1 J_0^2(\sqrt{a\xi\eta})\,J_0^2[\sqrt{a(1-\eta)(t-\xi)}]\,d\eta.$$

En partant de formules identiques à (5.118), on obtiendrait de nouvelles relations entre les fonctions spéciales.

Calculons à titre d'exemple la somme d'une série fonctionnelle. Soit $k = \sqrt{B+1} - \sqrt{B}$; on a l'identité

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B+1}} [1 - 2k^2 + 2k^4 - 2k^6 + \ldots] = \frac{B}{B+1}.$$

Compte tenu de (5.120), il vient

$$J_0^2(\sqrt{t}) - 2J_1^2(\sqrt{t}) + 2J_2^2(\sqrt{t}) - 2J_3^2(\sqrt{t}) + \ldots = J_0(2\sqrt{t}).$$

Multipliant l'égalité (5.99) par μ^n et sommant sur n de 0 à ∞, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B\mu^n}{(B-\lambda)^{n+1}} = \frac{B}{B-\lambda-\mu},$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} I_n(2\sqrt{\lambda t}) = I_0(2\sqrt{(\lambda+\mu)t}).$$

En conclusion, établissons un lien entre la table de valeurs des opérateurs $F(B)$ et la table de valeurs des opérateurs $F(p)$, où $p = \frac{d}{dt}$. Soit $F(B) = \varphi(t)$ et $F(p) = f(t)$. Par définition des opérateurs $F(B)$ et $F(p)$, on a

$$F(B) = 2B \int_0^{\infty} \varphi(t) K_0(2\sqrt{Bt})\,dt,$$

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt}\,dt.$$

Donc,

$$2p \int_0^{\infty} \varphi(t) K_0(2\sqrt{pt})\,dt = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt}$$

Compte tenu de l'égalité

$$\int_0^{\infty} e^{-px-\frac{qt}{x}} \frac{dx}{x} = 2K_0(2\sqrt{pqt}),$$

où il importe de poser $q = 1$, il vient

$$\int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt \int_0^{\infty} e^{-px-\frac{t}{x}} \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt}\,d$$

ou

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^\infty \varphi(\xi x)\, e^{-\xi}\, d\xi = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

d'où

$$f(t) = \int_0^\infty \varphi(t\xi)\, e^{-\xi}\, d\xi. \qquad (5.122)$$

Ici $\varphi(t)$ appartient à L_1 et vérifie la condition (5.102). Ceci nous suggère le procédé suivant de calcul de $F(B)$ à l'aide des tables de valeurs de $F(p)$. Donc, pour trouver $F(B)$, il faut calculer $F(p) = f(t)$, puis remplacer l'argument t de la fonction $f(t)$ par $\frac{1}{p}$ et déterminer la valeur de l'opérateur $f\left(\frac{1}{p}\right) = \varphi(t)$, ce qui donne $F(B) = \varphi(t)$. Ce procédé n'est certes valable que dans le cas où la fonction $f(t)$ est représentable par l'intégrale (5.122). Appliquons ce procédé au calcul, par exemple, de l'opérateur $\frac{B}{B-a}$. On a $\frac{p}{p-a} = e^{at}$, $e^{\frac{a}{p}} = I_0(2\sqrt{at})$. Donc, $\frac{B}{B-a} = I_0(2\sqrt{at})$, i.e. a lieu (5.95). De façon analogue, on trouve

$$\frac{B}{\sqrt{B^2+a^2}}\left(\sqrt{B^2+a^2}-B\right)^{\nu} = a^{\nu} J_{\nu}(2\sqrt{at})\, I_{\nu}(2\sqrt{at}), \qquad (5.123)$$

$$B \ln\frac{B+a}{B-a} = \sqrt{\frac{a}{t}}\,[J_1(2\sqrt{at}) - I_1(2\sqrt{at})]. \qquad (5.124)$$

Posant $q = \sqrt{B^2+1} - B$ il vient les identités

$$\frac{B}{\sqrt{B^2+1}}(q - q^3 + q^5 - q^7 + \ldots) = \frac{B}{2(B^2+1)},$$

$$\frac{B}{\sqrt{B^2+1}}(1 - 2q^2 + 2q^4 - 2q^6 + \ldots) = \frac{B^2}{B^2+1}.$$

En substituant aux opérateurs leurs expressions (5.96) et (5.124), on trouve

$$J_1(2\sqrt{t})\, I_1(2\sqrt{t}) - J_3(2\sqrt{t})\, I_3(2\sqrt{t}) + \\ + J_5(2\sqrt{t})\, I_5(2\sqrt{t}) - J_7(2\sqrt{t})\, I_7(2\sqrt{t}) + \ldots = \frac{1}{2}\operatorname{bei}(2\sqrt{t}),$$

$$J_0(2\sqrt{t})\, I_0(2\sqrt{t}) - 2J_2(2\sqrt{t})\, I_2(2\sqrt{t}) + \\ + 2J_4(2\sqrt{t})\, I_4(2\sqrt{t}) - 2J_6(2\sqrt{t})\, I_6(2\sqrt{t}) + \ldots = \operatorname{ber}(2\sqrt{t}).$$

Avant d'achever ce bref exposé sur la théorie du calcul opérationnel pour l'opérateur $B = \frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}$, on observera qu'en plus de l'application de cette théorie au calcul des intégrales définies et à la somme de séries fonctionnelles, on aurait pu citer des exemples d'intégration d'équations différentielles. L'équation différentielle la plus simple à résoudre est

$$L\left(\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}\right)x(t)=f(t), \tag{5.125}$$

où $L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ est un polynôme à coefficients constants a_i. Si les conditions initiales sont nulles, i.e.

$$x(0)=0,\ Bx(t)|_{t=0}=[tx''(t)+x'(t)]_{t=0}=0,$$

$$B^2x(t)|_{t=0}=[t^2x^{(IV)}(t)+4tx'''(t)+2x''(t)]_{t=0}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B^{n-1}x(t)|_{t=0}=0,$$

en substituant à l'opérateur $\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}$ l'opérateur B l'équation (5.125) s'écrit $L(B)\,x(t) = f(t)$ et sa solution sera $x(t) = \frac{1}{L(B)}f(t)$. On trouve l'expression de $\frac{1}{L(B)}f(t)$ en décomposant $\frac{1}{L(B)}$ en fractions simples de la même façon que dans le calcul opérationnel de Heaviside. Si les conditions initiales x_k ne sont pas nulles, on fait la substitution suivante (cf. 5.90))

$$\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}x(t)=B[x(t)-x_0].$$

L'application successive de cette formule donne

$$\left(\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}\right)^k x(t)=B^kx(t)-Bx_{k-1}-B^2x_{k-2}-\ldots-B^kx_0.$$

Exemple: soit à résoudre l'équation

$$\left(\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}\right)^2 x(t)-3\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)=0 \tag{5.126}$$

avec la condition $x(0) = 0$, $Bx(t)|_{t=0} = \alpha$. Mettons cette équation sous la forme opérationnelle

$$B^2x(t) - B\alpha - 3Bx(t) + 2x(t) = 0$$

ou

$$(B^2 - 3B + 2)\,x(t) = \alpha B.$$

D'où (cf. 5.95))

$$x(t)=\frac{\alpha B}{B^2-3B+2}=\frac{\alpha B}{B-2}-\frac{\alpha B}{B-1}=\alpha\{I_0(2\sqrt{2t})-I_0(2\sqrt{t})\}.$$

On résout de façon analogue certains types d'équations aux dérivées partielles.

§ 17. Sur une généralisation du calcul opérationnel

De ce qui précède il suit que le calcul opérationnel pour l'opérateur $p = \frac{d}{dt}$ peut être construit par une extension du corps des fonctions sur lequel le produit est défini par

$$F(t) * G(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t F(t-\xi) G(\xi) d\xi. \tag{5.127}$$

Le calcul opérationnel pour l'opérateur $B = \frac{d}{dt} t \frac{d}{dt}$ se construit de façon analogue si le produit est défini par

$$F(t) * G(t) = \frac{d}{dt} t \frac{d}{dt} \int_0^t d\xi \int_0^1 F[(t-\xi)(1-\eta)] G(\xi\eta) d\eta. \tag{5.128}$$

Supposons qu'une fonction $\omega(t)$ est définie pour tous les $t \geqslant 0$, qu'elle possède des dérivées de tous les ordres quel que soit $t > 0$, $\omega(t) > 0$ lorsque $t > 0$ et qu'existent les intégrales

$$\omega^*(p) = \int_0^\infty \omega(t) e^{-pt} dt, \tag{5.129}$$

$$\omega^*(B) = 2 \int_0^\infty \omega(t) K_0(2\sqrt{Bt}) dt. \tag{5.130}$$

Soit L_ω l'ensemble de toutes les fonctions $f(t)$ définies sur la section $[0, \infty[$ et vérifiant la condition

$$\int_0^t |f(\xi)| \omega(\xi) d\xi < \infty, \quad \forall t > 0. \tag{5.131}$$

De façon analogue soit B_ω l'ensemble de toutes les fonctions $f(t)$ définies sur la section $[0, \infty[$ et vérifiant la condition

$$\int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi |f(\eta)| \omega(\eta) d\eta < \infty, \quad \forall t > 0. \tag{5.132}$$

Définissons dans les ensembles L_ω et B_ω l'opérateur U en posant

$$Uf = \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t f(\xi) \omega(t-\xi) \omega(\xi) d\xi, \quad f \in L_\omega \tag{5.133}$$

et

$$Uf = \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t d\xi \int_0^1 f(\xi\eta)\,\omega[(t-\xi)(1-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,d\eta, \quad f \in B_\omega. \quad (5.134)$$

L'opérateur U possède un inverse U^{-1}. En effet, de la condition $Uf = 0$ qui est valable pour $\forall t > 0$, il résulte qu'au moins l'une des fonctions $f(t)\,\omega(t)$ ou $\omega(t)$ est presque partout nulle. Or $\omega(t) > 0$, donc $f(t) = 0$ presque partout. On remarquera que pour que l'opérateur inverse U^{-1} existe, il suffit que $\omega(t) \neq 0$ presque partout sur la section $[0, \infty[$.

Soient UL_ω l'ensemble de toutes les fonctions $F(t)$, $t > 0$, représentables sous la forme

$$F(t) = Uf, \quad f \in L_\omega; \quad (5.135)$$

UB_ω l'ensemble de toutes les fonctions $F(t)$, $t > 0$, représentables sous la forme

$$F(t) = Uf, \quad f \in B_\omega. \quad (5.136)$$

On se servira des notations

$$h(t) = \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t f(t-\xi)\,g(\xi)\,\omega(t-\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi \quad (5.137)$$

et

$$h(t) = \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t d\xi \int_0^1 f[(t-\xi)(1-\eta)] \times$$

$$\times\, g(\xi\eta)\,\omega[(t-\xi)(1-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,d\eta. \quad (5.138)$$

De (5.137) il s'ensuit que pour tous les $t > 0$, on a

$$\int_0^t |h(\xi)|\,\omega(\xi)\,d\xi \leqslant \int_0^t |f(\xi)|\,\omega(\xi)\,d\xi \int_0^t |g(\xi)|\,\omega(\xi)\,d\xi.$$

Donc, si $f \in L_\omega$ et $g \in L_\omega$, la fonction $h(t)$ définie par (5.137) appartient également à L_ω.

S'agissant de l'égalité (5.138), pour tous les $t > 0$, on a une relation analogue (cf. [52]):

$$\int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi |h(\eta)|\,\omega(\eta)\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi |f(\eta)|\,\omega(\eta)\,d\eta \int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi |g(\eta)|\,\omega(\eta)\,d\eta.$$

Donc, si $f \in B_\omega$ et $g \in B_\omega$, alors la fonction $h(t)$ définie par (5.138) appartient également à B_ω. Par conséquent, les ensembles L_ω et B_ω

sur lesquels l'addition et la multiplication, définies respectivement par (5.137) et (5.138), sont comprises au sens ordinaire, forment des anneaux commutatifs. De là il résulte que les ensembles UL_ω et UB_ω sont également des anneaux si l'addition est prise au sens ordinaire et la multiplication définie à l'aide des égalités

$$F(t) * G(t) = U^{-1} \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t F(t-\xi)\, G(\xi)\, \omega(t-\xi)\, \omega(\xi)\, d\xi, \quad (5.139)$$

où $F(t) \in UL_\omega$, $G(t) \in UL_\omega$, ou bien

$$F(t) * G(t) = U^{-1} \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t d\xi \int_0^1 F[(t-\xi)(1-\eta)] \times$$
$$\times G(\xi\eta)\, \omega[(t-\xi)(1-\eta)]\, \omega(\xi\eta)\, d\eta, \quad (5.140)$$

où $F(t) \in UB_\omega$, $G(t) \in UB_\omega$.

En effet, en mettant (5.137) et (5.138) sous la forme

$$h = fg,$$

(5.139) et (5.140) deviennent

$$F(t) * G(t) = U^{-1} FG. \quad (5.141)$$

Par hypothèse, $F = Uf$ et $G = Ug$, donc

$$F(t) * G(t) = U^{-1}(Uf \cdot Ug). \quad (5.142)$$

Prouvons maintenant que dans les anneaux L_ω et B_ω on a

$$U(fg) = Uf \cdot g = f \cdot Ug. \quad (5.143)$$

Démontrons tout d'abord (5.143) pour l'anneau L_ω. Soit

$$h(t) = \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t f(t-\xi)\, g(\xi)\, \omega(t-\xi)\, \omega(\xi)\, d\xi = fg.$$

Alors

$$\int_0^t h(\xi)\, \omega(t-\xi)\, \omega(\xi)\, d\xi =$$
$$= \int_0^t \omega(t-\xi)\, d\xi \int_0^\xi f(\xi-v)\, g(v)\, \omega(\xi-v)\, \omega(v)\, dv =$$
$$= \int_0^t g(v)\, \omega(v)\, dv \int_0^t \omega(t-\xi)\, f(\xi-v)\, \omega(\xi-v)\, d\xi =$$
$$= \int_0^t g(v)\, \omega(v)\, dv \int_0^{t-v} \omega(t-v-u)\, f(u)\, \omega(u)\, du.$$

Mais

$$Uf = \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t f(\xi)\,\omega(t-\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi = F(t), \tag{5.144}$$

donc

$$\int_0^t h(\xi)\,\omega(t-\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi = \int_0^t g(v)\,\omega(v)\,F(t-v)\,\omega(t-v)\,dv,$$

d'où

$$Uh = \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t h(\xi)\,\omega(t-\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t F(t-v)\,g(v)\,\omega(t-v)\,\omega(v)\,dv = Uf \cdot g.$$

Le meilleur moyen de démontrer (5.143) pour l'anneau B_ω est de se servir de l'égalité (cf. [5])

$$\omega(xy)\,h(xy) = \int_0^{xy} d\xi \int_0^1 f(\xi\eta)\,g[(xy-\xi)(1-\eta)]\,\omega[(xy-\xi)(1-\eta)] \times$$

$$\times\,\omega(\xi\eta)\,d\eta = \int_0^x \int_0^y f(\xi\eta)\,g[(x-\xi)(y-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,\omega[(x-\xi)(y-\eta)]\,d\xi\,d\eta.$$

D'où il vient

$$\int_0^x \int_0^y h(\xi\eta)\,\omega(\xi\eta)\,\omega[(x-\xi)(y-\eta)]\,d\xi\,d\eta = \int_0^x \int_0^y \omega[(x-\xi)(y-\eta)]\,d\xi\,d\eta \times$$

$$\times \int_0^\xi \int_0^\eta f(uv)\,\omega(uv)\,g[(\xi-u)(\eta-v)]\,\omega[(\xi-u)(\eta-v)]\,du\,dv =$$

$$= \int_0^x \int_0^y f(\xi\eta)\,G[(x-\xi)(y-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,\omega[(x-\xi)(y-\eta)]\,d\xi\,d\eta,$$

où

$$G(xy) = \frac{1}{\omega(xy)} \int_0^x \int_0^y g(\xi\eta)\,\omega[(x-\xi)(y-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{\omega(xy)} \int_0^{xy} d\xi \int_0^1 g(\xi\eta)\,\omega[(xy-\xi)(1-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,d\eta.$$

Posant

$$H(xy)=\frac{1}{\omega(xy)}\int_0^x\int_0^y h(\xi\eta)\,\omega[(x-\xi)(y-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{\omega(xy)}\int_0^{xy}d\xi\int_0^1 h(\xi\eta)\,\omega[(xy-\xi)(1-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,d\eta,$$

on trouve

$$H(xy)=\frac{1}{\omega(xy)}\int_0^x\int_0^y f(\xi\eta)\,G[(x-\xi)(y-\eta)]\times$$

$$\times\,\omega[(x-\xi)(y-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{\omega(xy)}\int_0^{xy}d\xi\int_0^1 f(\xi\eta)\;G[(xy-\xi)\;(1-\eta)]\;\omega[(xy-\xi)\;(1-\eta)]\;\omega(\xi\eta)\,d\eta.$$

En remplaçant dans les dernières égalités xy par la variable t, on obtient

$$H(t)=\frac{1}{\omega(t)}\int_0^t d\xi\int_0^1 f(\xi\eta)\,G[(t-\xi)(1-\eta)]\times$$

$$\times\,\omega[(t-\xi)(1-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,d\eta=fG,$$

$$H(t)=\frac{1}{\omega t}\int_0^t d\xi\int_0^1 h(\xi\eta)\,\omega[(t-\xi)(1-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,d\eta=Uh,$$

$$G(t)=\frac{1}{\omega(t)}\int_0^t d\xi\int_0^1 g(\xi\eta)\,\omega[(t-\xi)(1-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,d\eta=Ug.$$

D'où il résulte que

$$Uh = U\,(fg) = fG = fUg.$$

De (5.142) on obtient pour les ensembles UL_ω et UB_ω

$$F\,(t)*G\,(t) = U^{-1}FG = U^{-1}\,(Uf\cdot Ug) = fUg = Ufg.$$

Donc, si F et G appartiennent à UL_ω ou UB_ω, le produit $F * G$ appartiendra respectivement à UL_ω ou UB_ω. Ainsi, les ensembles UL_ω et UB_ω sur lesquels le produit est défini par (5.139) et (5.140) sont des anneaux. Ces anneaux ne possèdent pas de diviseurs de zéro, ils peuvent donc être étendus à des corps de quotients que nous noterons $R\,(UL_\omega)$ et $R\,(UB_\omega)$. Comme la fonction constante $f = 1$ appartient à L_ω et B_ω, la fonction

$$\sigma(t)=\frac{1}{\omega(t)}\int_0^t \omega(t-u)\,\omega(u)\,du\in UL_\omega\,; \qquad (5.145)$$

et la fonction

$$\sigma(t) = \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t d\xi \int_0^1 \omega[(t-\xi)(1-\eta)]\,\omega(\xi\eta)\,d\eta \in UB_\omega. \quad (5.146)$$

De toute évidence on peut abréger l'écriture des égalités (5.145), (5.146), i.e. $\sigma(t) = U1$. D'où

$$\sigma(t) * F(t) = U^{-1}(U1 \cdot F(t)) = F(t)\,1 = UF(t).$$

Donc, dans les anneaux UL_ω et UB_ω le produit par $\sigma(t)$ coïncide avec l'action de l'opérateur U, i.e.

$$\sigma(t) = U. \quad (5.147)$$

L'opérateur inverse appartiendra au corps $R(UL_\omega)$ ou $R(UB_\omega)$ et $U^{-1} = 1/\sigma(t)$. Désignons spécialement cet opérateur par

$$\frac{1}{\sigma(t)} = \Omega. \quad (5.148)$$

On appellera *fonction* tout opérateur de la forme

$$\frac{F(t)}{\sigma(t)} = \Omega F(t),$$

où $F(t) \in UL_\omega$ ou $F(t) \in UB_\omega$. Comme on a toujours $F = Uf = (1/\Omega) f$, l'égalité

$$\frac{F(t)}{\sigma(t)} = \Omega F = f \quad (5.149)$$

a lieu quelle que soit la fonction $F(t)$ de l'ensemble UL_ω ou UB_ω.

Dans les corps $R(UL_\omega)$ et $R(UB_\omega)$ on peut introduire des transformations intégrales étroitement liées à celles de Laplace et de Bessel-Meijer.

Considérons tout d'abord le corps $R(UL_\omega)$. Un opérateur $F/G \in R(UL_\omega)$ est par définition *transformable* si existent les intégrales

$$\left.\begin{aligned} F^*(p) &= \int_0^\infty F(t)\,\omega(t)\,e^{-pt}\,dt, \\ G^*(p) &= \int_0^\infty G(t)\,\omega(t)\,e^{-pt}\,dt. \end{aligned}\right\} \quad (5.150)$$

A un tel opérateur correspond une fonction de la variable complexe p, plus exactement :

$$\frac{F}{G} = \frac{F^*(p)}{G^*(p)}. \quad (5.151)$$

On montre que l'ensemble de tous les opérateurs transformables est un sous-corps de $R(UL_\omega)$ isomorphe au corps de toutes les fonc-

tions de la forme $F^*(p)/G^*(p)$ sur lequel l'addition, la multiplication et la division sont comprises au sens ordinaire. Ceci étant, à la transformée de la fonction $F(t) \in UL_\omega$ est associée la fonction de la variable complexe

$$F(t) \doteqdot \frac{\int\limits_0^\infty F(t)\,\omega(t)\,e^{-pt}\,dt}{\int\limits_0^\infty \omega(t)\,e^{-pt}\,dt} = \frac{1}{\omega^*(p)} F^*(p) = \overline{F}(p). \qquad (5.152)$$

On voit aisément que cette formule est valable pour la fonction $f(t) \in L_\omega$, si seulement existe l'intégrale

$$\int\limits_0^\infty f(t)\,\omega(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Il est immédiat d'établir que

$$\Omega = \frac{1}{\sigma(t)} \doteqdot \frac{\omega^*(p)}{\omega^*(p)\,\omega^*(p)} = \frac{1}{\omega^*(p)}.$$

Donc,

$$\Omega = \frac{1}{\omega^*(p)}, \quad \frac{1}{\Omega} = \omega^*(p). \qquad (5.153)$$

On obtient des formules analogues pour le corps $R(UB_\omega)$. Supposons que

$$\left.\begin{aligned} F^*(B) &= 2\int\limits_0^\infty F(t)\,\omega(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt, \\ G^*(B) &= 2\int\limits_0^\infty G(t)\,\omega(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (5.154)$$

On dira que l'opérateur

$$\frac{F}{G} \in R(UB_\omega)$$

est *transformable* si existent les intégrales (5.154). L'ensemble de tous les opérateurs transformables forme un corps qui est isomorphe à celui de toutes les fonctions de la variable complexe B de la forme $F^*(B)/G^*(B)$. Cet isomorphisme est défini par la correspondance

$$\frac{F(t)}{G(t)} = \frac{F^*(B)}{G^*(B)}. \qquad (5.155)$$

L'opérateur $U = 1/\Omega$ est associé à la fonction

$$\frac{1}{\Omega} = 2\int\limits_0^\infty \omega(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt = \omega^*(B). \qquad (5.156)$$

Par ailleurs, si $F(t) \in UB_\omega$, alors

$$F(t) = \frac{1}{\omega^*(B)} F^*(B). \tag{5.157}$$

La formule (5.157) est valable pour toute fonction $f(t)$ de B_ω si existe l'intégrale

$$\int_0^\infty f(t)\,\omega(t)\,K_0(2\sqrt{Bt})\,dt.$$

Le corps des opérateurs $R(UL_\omega)$ est isomorphe au corps $\mathfrak{M}$ des opérateurs de Mikusinski [165]. En effet, à tout opérateur

$$\frac{F}{G} \in R(UL_\omega)$$

on peut associer l'opérateur

$$\frac{f(t)\,\omega(t)}{g(t)\,\omega(t)},$$

où les produits $f(t)\omega(t)$ et $g(t)\,\omega(t)$ sont pris au sens habituel. Montrons que cette correspondance

$$\frac{F}{G} = \frac{f}{g} \leftrightarrow \frac{f\omega}{g\omega}$$

définit un isomorphisme. Pour cela, il suffit de montrer que l'anneau des fonctions L_ω est isomorphe à l'anneau L des fonctions sommables sur tout intervalle $0 < t < T$ dans lequel le produit est égal à la convolution ordinaire

$$h(t) = \int_0^t f(t-\xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

Si à une fonction $f(t) \in L_\omega$ on associe la fonction $f(t)\omega(t) \in L$, i.e. si l'on pose $f(t) \leftrightarrow f(t)\omega(t)$, il est évident qu'une somme de fonctions se transforme en une somme, et le produit

$$h = fg = \frac{1}{\omega(t)} \int_0^t f(t-\xi)\,g(\xi)\,\omega(t-\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi$$

en le produit des opérateurs f et g. Ce qui démontre l'isomorphisme des corps $R(UL_\omega)$ et $\mathfrak{M}$.

On a la même proposition pour le corps $R(UB_\omega)$. Ce corps est isomorphe au corps $\mathfrak{M}_B$ introduit dans [52]. L'isomorphisme des corps $R(UL_\omega)$ et $\mathfrak{M}$, d'une part, et $R(UB_\omega)$ et $\mathfrak{M}_B$, d'autre part, n'amoindrit pas leur rôle dans la théorie du calcul opérationnel. Une étude détaillée des opérateurs dans les corps $R(UL_\omega)$ et $R(UB_\omega)$ peut conduire à de nouveaux résultats en analyse, et notamment en théorie des fonctions spéciales.

Traitons quelques cas particuliers. Supposons que dans l'anneau UL_ω la fonction $\omega(t) = t^{n-1}/\Gamma(n)$, $n > 0$. L'ensemble UL_ω sera composé de toutes les fonctions représentables sous la forme

$$F(t) = Uf = \frac{1}{t^{n-1}\Gamma(n)} \int_0^t f(\xi)(t-\xi)^{n-1}\xi^{n-1}\,d\xi. \qquad (5.158)$$

L'ensemble L_ω est constitué de toutes les fonctions vérifiant la condition

$$\int_0^t |f(\xi)|\,\xi^{n-1}\,d\xi < \infty.$$

Supposons que $f(t) = t^\alpha$, où $\alpha > -n$. Alors

$$Ut^\alpha = \frac{1}{t^{n-1}\Gamma(n)} \int_0^t \xi^\alpha (t-\xi)^{n-1}\xi^{n-1}\,d\xi. \qquad (5.159)$$

D'où

$$Ut^\alpha = t^{\alpha+n}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+2n)}. \qquad (5.160)$$

Donc, toute fonction t^β, $\beta + n > 0$, appartient à l'ensemble UL_ω. Lorsque $\alpha = 0$, on déduit de (5.160)

$$\sigma(t) = t^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}.$$

Donc

$$\frac{1}{\Omega} = U = t^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}$$

et

$$\Omega = \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\,t^n}.$$

De (5.158) il vient

$$\frac{1}{t^{n-1}}\frac{d^n}{dt^n}\,t^{n-1}Uf = f(t).$$

De là il résulte que sur UL_ω l'opérateur Ω coïncide avec l'opérateur différentiel

$$\frac{1}{t^{n-1}}\frac{d^n}{dt^n}\,t^{n-1}.$$

Donc, sur l'anneau LU_ω le produit est égal à

$$F(t) * G(t) = \frac{1}{t^{n-1}}\frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t F(t-\xi)\,G(\xi)\,(t-\xi)^{n-1}\xi^{n-1}\,d\xi. \quad (5.161)$$

Comme les fonctions t^α et t^β ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) appartiennent à UL_ω, il vient

$$t^\alpha * t^\beta = \frac{1}{t^{n-1}} \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha+n-1} \xi^{\beta+n-1} \, d\xi.$$

D'où

$$t^\alpha * t^\beta = \frac{1}{t^{n-1}} \frac{d^n}{dt^n} t^{\alpha+\beta+2n-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha+n-1} u^{\beta+n-1} \, du,$$

ou

$$t^\alpha * t^\beta = t^{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)\Gamma(n)}.$$

Donc

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+n)} * \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+n)} = \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+n)\Gamma(n)}. \tag{5.162}$$

Cette formule nous permet de calculer facilement

$$\frac{1}{\Omega^k} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+kn)} t^{kn}. \tag{5.163}$$

D'où il résulte

$$\frac{\Omega}{\Omega-a} = \Gamma(n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{kn} a^k}{\Gamma(n+kn)}. \tag{5.164}$$

Si dans l'anneau UB_ω on pose

$$\omega(t) = \frac{t^{n-1}}{\Gamma^2(n)}, \quad n > 0,$$

l'ensemble UB_ω sera composé de toutes les fonctions représentables sous la forme

$$F(t) = Uf = \frac{1}{t^{n-1}\Gamma^2(n)} \int_0^t (t-\xi)^{n-1} \xi^{n-1} \, d\xi \int_0^1 f(\xi\eta)(1-\eta)^{n-1} \eta^{n-1} \, d\eta. \tag{5.165}$$

L'ensemble B_ω sera composé de toutes les fonctions vérifiant la condition

$$\int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi |f(\eta)| \eta^{n-1} \, d\eta < \infty. \tag{5.166}$$

Si $f(t) = t^\alpha$, alors pour $\alpha + n > 0$ la fonction $t^\alpha \in B_\omega$ et

$$Ut^\alpha = \frac{1}{t^{n-1}\Gamma^2(n)} \int_0^t (t-\xi)^{n-1} \xi^{\alpha+n-1} \, d\xi \int_0^1 (1-\eta)^{n-1} \eta^{\alpha+n-1} \, d\eta.$$

Donc

$$Ut^{\alpha} = t^{\alpha+n} \frac{\Gamma^2(n+\alpha)}{\Gamma^2(2n+\alpha)}. \tag{5.167}$$

Pour $\alpha = 0$ on obtient

$$\sigma(t) = t^n \frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma^2(2n)}.$$

D'où

$$U = t^n \frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma^2(2n)}$$

et

$$\Omega = \frac{\Gamma^2(2n)}{\Gamma^2(n)\, t^n}. \tag{5.168}$$

De (5.165) on déduit que sur l'ensemble UB_ω l'opérateur Ω coïncide avec l'opérateur différentiel

$$\frac{1}{t^{n-1}}\left(\frac{d}{dt}\right)^n t^n \left(\frac{d}{dt}\right)^n t^{n-1}.$$

Donc, sur l'anneau UB_ω le produit est égal à

$$F(t) * G(t) = \frac{1}{t^{n-1}}\left(\frac{d}{dt}\right)^n t^n \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma^2(n)} \times$$

$$\times \int_0^t d\xi \int_0^1 F[(t-\xi)(1-\eta)]\, G(\xi\eta)\, (t-\xi)^{n-1} \xi^{n-1} (1-\eta)^{n-1} \eta^{n-1}\, d\eta. \tag{5.169}$$

En particulier, lorsque $F^{\alpha} = t^{\alpha}$, $G = t^{\beta}$, $\alpha + n > 0$, $\beta + n > 0$, il vient

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+n)} * \frac{t^{\beta}}{\Gamma^2(\beta+n)} = \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma^2(\alpha+\beta+n)\,\Gamma^2(n)}. \tag{5.170}$$

L'égalité

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma^2(2n)} t^n$$

et (5.170) entraînent

$$\frac{1}{\Omega^k} = \frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma^2(n+kn)} t^{kn}. \tag{5.171}$$

Donc

$$\frac{\Omega}{\Omega - a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n)\, t^{kn} a^k}{\Gamma^2(n+kn)}. \tag{5.172}$$

Par des méthodes standard on établirait de nombreuses formules analogues à (5.164) et (5.172), i.e. on calculerait des opérateurs du

type $f(\Omega)$. Souvent on simplifie singulièrement ce problème en utilisant les transformations intégrales

$$f^*(p) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty f(t)\, t^{n-1} e^{-pt}\, dt$$

et

$$f^*(B) = \frac{2}{\Gamma^2(n)} \int_0^\infty f(t)\, t^{n-1} K_0(2\sqrt{Bt})\, dt.$$

Les formules opérationnelles obtenues permettent en particulier de résoudre des équations différentielles de la forme

$$\Omega^n x(t) + a_1 \Omega^{n-1} x(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t), \qquad (5.173)$$

où Ω est l'opérateur

$$\frac{1}{t^{n-1}} \frac{d^n}{dt^n} t^{n-1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{t^{n-1}} \left(\frac{d}{dt}\right)^n t^n \left(\frac{d}{dt}\right)^n t^{n-1}.$$

Certains cas particuliers de l'opérateur Ω sont intéressants. Par exemple, dans $R(UB_\omega)$ l'opérateur Ω se transforme pour $n = 1$ en l'opérateur de Bessel

$$\frac{d}{dt} t \frac{d}{dt},$$

et pour $n = 2$ en l'opérateur

$$S = \frac{1}{t}\left(\frac{d}{dt}\right)^2 t^2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 t = \frac{1}{t^2} \frac{d}{dt} t \frac{d}{dt} t^2 \frac{d}{dt} t \frac{d}{dt} =$$

$$= \left(t \frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + \frac{1}{t}\right)\left(t \frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + \frac{1}{t}\right) =$$

$$= t^2 \frac{d^4}{dt^4} + 8t \frac{d^3}{dt^3} + 14 \frac{d^2}{dt^2} + \frac{4}{t}\frac{d}{dt}. \qquad (5.174)$$

Observons que l'équation engendrée par l'opérateur (5.174)

$$\frac{1}{t^2} \frac{d}{dt} t \frac{d}{dt} t^2 \frac{d}{dt} t \frac{dy}{dt} + a^2 y = 0$$

admet pour solutions

$$\beta\ \mathrm{ei}\ (at) = \frac{\mathrm{bei}\ (2\sqrt{at})}{at},$$

$$\beta\ \mathrm{er}\ (at) = \frac{\mathrm{ber}\ (2\sqrt{at})}{at},$$

$$\varkappa\ \mathrm{ei}\ (at) = \frac{\mathrm{kei}\ (2\sqrt{at})}{at},$$

$$\varkappa\ \mathrm{er}\ (at) = \frac{\mathrm{ker}\ (2\sqrt{at})}{at}.$$

Ces fonctions jouent un rôle important dans le calcul opérationnel du cas particulier examiné de l'opérateur Ω. Par exemple, de (5.172) il vient que

$$\frac{S}{S+a}=\beta \text{ ei } (\sqrt{a}\, t).$$

En procédant comme pour l'opérateur $\Omega = 1/\sigma(t)$, on pourrait étudier d'autres opérateurs, par exemple, l'opérateur $1/t^{\alpha}$, $\alpha > 0$. A un tel opérateur est associé un certain opérateur différentiel du type Ω. Ainsi dans le corps $R(UL_{\omega})$, où $\omega(t) = t^{n-1}/\Gamma(n)$, l'opérateur $1/t^m$, m étant un entier positif, est associé à l'opérateur différentiel

$$\frac{1}{t^{n-1}}\left(\frac{d}{dt}\right)^m t^{n-1}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+m)}.$$

Dans le corps $R(UB_{\omega})$, où $\omega(t) = t^{n-1}/\Gamma^2(n)$, l'opérateur $1/t^m$, m étant un entier positif, est associé à l'opérateur différentiel

$$\frac{1}{t^{n-1}}\left(\frac{d}{dt}\right)^m t^m\left(\frac{d}{dt}\right)^m t^{n-1}\frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma^2(n+m)}.$$

En conclusion, on remarquera que la théorie du calcul opérationnel de l'opérateur Ω peut être développée bien plus amplement que nous venons de le faire, en particulier dans les problèmes relatifs aux fonctions opérationnelles, aux séries opérationnelles, à la résolution des équations différentielles et à la théorie des fonctions spéciales.

Bibliographie du chapitre V

[246], [47], [50], [51], [165], [198], [11], [40], [169].

TABLES DES FORMULES

CHAPITRE VI

LISTE DES NOTATIONS DES FONCTIONS SPÉCIALES ET DE CERTAINES CONSTANTES

6.1	$\arccos x = \frac{1}{i} \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}$
6.2	$\arcsin x = \frac{1}{i} \ln (ix + \sqrt{1 - x^2}$
6.3	$\operatorname{arctg} x = \frac{i}{2} \ln \frac{1 - ix}{1 + ix}$
6.3[a]	$\operatorname{arccotg} x = \frac{i}{2} \ln \frac{x - i}{x + i}$
6.4	$\operatorname{Arch} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$
6.5	$\operatorname{Arsh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$
6.6	$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$
6.6[a]	$\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$
6.7	$(a)_n = a (a + 1) \ldots (a + n - 1) ;\ n = 1, 2, \ldots$
6.8	$(a)_0 = 1$
6.9	$(a)_\nu = \frac{\Gamma (a + \nu)}{\Gamma (a)}$
6.10	$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma (a + 1)}{\Gamma (b + 1) \Gamma (a - b + 1)}$

6.11	$\mathrm{B}(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi$
6.12	$\mathrm{B}(x,\ y)=\int_0^1 \xi^{x-1}(1-\xi)^{y-1}\, d\xi=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
6.13	$\mathrm{bei}_\nu(x)=\mathrm{Im}\,[J_\nu(i\sqrt{i}\,x)]$, où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe z
6.14	$\mathrm{ber}_\nu(x)=\mathrm{Re}\,[J_\nu(i\sqrt{i}\,x)]$, où $\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z
6.15	$\mathrm{bei}_0(x)=\mathrm{bei}\,x=\mathrm{Im}\,[I_0(\sqrt{i}\,x)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[(2n+1)\,!\,]^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2}$
6.16	$\mathrm{ber}_0(x)=\mathrm{ber}\,x=\mathrm{Re}\,[I_0(\sqrt{i}\,x)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[(2n)\,!\,]^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{4n}$
6.17	$C=-\Gamma'(1)=-\psi(1)=0{,}577215665\ldots$
6.18	$C_n^\nu(x)=\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2\lambda)}\,{}_2F_1\left(n+2\nu,\ -n\,;\ \nu+\frac{1}{2}\,;\ \frac{1-x}{2}\right)$
6.19	$C(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{u}}\cos u\, du$
6.20	$C(x)-iS(x)=\int_0^x \frac{e^{-iu}}{\sqrt{2\pi u}}\, du=\frac{1}{2}\int_0^x H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(u)\, du$
6.21	$\mathrm{ce}_{2n}(z,\ q)=\sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{(2n)}\cos 2kz$ est la fonction de Matieu
6.22	$\mathrm{ce}_{2n+1}(z,\ q)=\sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{(2n+1)}\cos(2k+1)\,z$
6.23	$\mathrm{Ce}_{2n}(z.\ q)=\mathrm{ce}_{2n}(iz,\ q)$
6.24	$\mathrm{Ce}_{2n+1}(z,\ q)=\mathrm{ce}_{2n+1}(iz,\ q)$
6.25	$\mathrm{chi}(x)=\ln\gamma x+\int_0^x \frac{\mathrm{ch}\,u-1}{u}\, du$
6.26	$\mathrm{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

6.27 $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

6.28 $\mathrm{Ci}\,(x) = -\displaystyle\int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,du = \ln \gamma x - \int_0^x \frac{1-\cos u}{u}\,du$

6.29 $\mathrm{Ci}\,(x) = -\mathrm{ci}\,(x)$

6.30 $C\,(k) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$

6.31 $D\,(k) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$

6.32 $D_n\,(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}\, \mathrm{He}_n\,(x)\,;\ n = 0, 1, 2, \ldots$

6.33 $D_\nu\,(x) = 2^{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}}\, W_{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2},\ \pm\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)$

6.34 $e = 2{,}718281828\ldots$

6.35 $e^x = \exp x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

6.36 $E\,(k) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$

6.37 $E\,(k,\ \varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 u}\, du$

6.38 $\mathbf{E}_\nu\,(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(\nu\varphi - x \sin \varphi)\, d\varphi$

6.39 $\mathrm{Ei}\,(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\, du = \mathrm{li}\,(e^x)$

6.40 $-\mathrm{Ei}\,(-z) = \displaystyle\int_z^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = -C - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n \cdot n!} =$

$= z^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{z}{2}}\, W_{-\frac{1}{2},\ 0}\,(z),\quad -\pi < \arg z < \pi$

10—0394

6.41 $\overline{\mathrm{Ei}}(x)=\frac{1}{2}[\mathrm{Ei}(x+i0)+\mathrm{Ei}(x-i0)]=C+\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot n!},\ x>0.$

6.42 $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du=\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-x^2\right)=$

$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}M_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(x^2)$

6.43 $\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}du=(\pi x)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}W_{-\frac{1}{4},\pm\frac{1}{4}}(x^2)$

6.44 $F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

6.45 $F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$

6.46 $F(\alpha,\beta;\gamma;x)={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=$

$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\gamma+k)}\frac{x^k}{k!},\quad |x|<1$

6.47 ${}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q;x)=$

$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1,k)(\alpha_2,k)\ldots(\alpha_p,k)}{(\beta_1,k)(\beta_2,k)\ldots(\beta_q,k)}\frac{x^k}{k!}$, où $(\alpha,k)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$,

$(\beta,k)=\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)}$

6.48 ${}_1F_1(\alpha;\beta;z)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\beta+k)}\frac{z^k}{k!}$

6.49 $\mathfrak{F}_n(\alpha,\gamma,x)=F(-n,\alpha+n;\gamma;x)=$

$=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(\alpha+n)\ldots(\alpha+n+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}x^k$

$(\gamma\neq 0,\ -1,\ \ldots,\ -n+1)$

6.50 $\mathrm{Fek}_{2n}(z,q)=\frac{\mathrm{ce}_{2n}(0,q)}{\pi A_0^{(2n)}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_{2k}^{(2n)}K_{2k}(-2i\sqrt{q}\,\mathrm{sh}\,z)$

6.51	$\mathrm{Fek}_{2n+1}(z,q)=\frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0,q)}{\pi\sqrt{q}\,A_1^{(2n+1)}}\operatorname{cth} z\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)A_{2k+1}^{(2n+1)}\times$ $\times K_{2k+1}(-2i\sqrt{q}\operatorname{sh} z)$
6.52	$\mathrm{Gek}_{2n+1}(z,q)=\frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0,q)}{\pi\sqrt{q}\,B_1^{(2n+1)}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B_{2k+1}^{(2n+1)}K_{2k+1}(-2i\sqrt{q}\operatorname{sh} z)$
6.53	$\mathrm{Gek}_{2n+2}(z,q)=-\frac{\mathrm{se}'_{2n+2}(0,q)}{\pi q B_2^{(2n+2)}}\operatorname{cth} z\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+2)B_{2k+2}^{(2n+2)}\times$ $\times K_{2k+2}(-2i\sqrt{q}\operatorname{sh} z)$
6.54	$\mathbf{H}_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\nu+\frac{3}{2}\right)}$
6.55	$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iY_\nu(z)$
6.56	$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iY_\nu(z)$
6.57	$\mathrm{He}_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$
6.58	$\mathrm{He}_{2n}(x)=(-1)^n 2^{-n}(n!)^{-1}(2n)!\,{}_1F_1\left(-n;\frac{1}{2};\frac{x^2}{2}\right)$
6.59	$\mathrm{He}_{2n+1}(x)=(-1)^n 2^{-n}(n!)^{-1}(2n+1)!\;x\,{}_1F_1\left(-n;\frac{3}{2};\frac{x^2}{2}\right)$
6.60	$\mathrm{He}_n^*(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$
6.61	$\mathrm{hei}_\nu(x)=\mathrm{Im}\,(H_\nu^{(1)}(i\sqrt{i}\,x))$
6.62	$\mathrm{hei}_0(x)=\mathrm{hei}\,(x)$
6.63	$\mathrm{her}_\nu(x)=\mathrm{Re}\,(H_\nu^{(1)}(i\sqrt{i}\,x))$
6.64	$\mathrm{her}_0(x)=\mathrm{her}\,(x)$
6.65	$I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$
6.66	$Ii_0(x)=Ji_0(ix)$
6.67	$\mathbf{J}_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\nu\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$

6.68	$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$
6.69	$J_{\mu,\nu}(x)=\frac{x^{\mu+\nu}}{3^{\mu+\nu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\,{}_0F_2\left(\mu+1,\nu+1;-\frac{x^3}{27}\right)$
6.70	$J_n^m(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2\cos\varphi)^m\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$
6.71	$J_\nu(xi\sqrt{i})=\mathrm{ber}_\nu\,x+i\,\mathrm{bei}_\nu\,x$
6.72	$Jc(x,y)=\int_0^y J_0(xu)\cos u\,du$
6.73	$Ji_\nu(x)=\int_x^{\infty}\frac{J_\nu(u)}{u}\,du$
6.74	$Js(x,y)=\int_0^y J_0(xu)\sin u\,du$
6.75	$K(k)=F(k)$
6.76	$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)$
6.77	$Ki_\nu\,x=\int_x^{\infty}\frac{K_\nu(u)}{u}\,du$
6.78	$\mathrm{kei}_\nu(x)=\mathrm{Im}\,(i^{-\nu}K_\nu(\sqrt{i}\,x))$
6.79	$\mathrm{ker}_\nu(x)=\mathrm{Re}\,(i^{-\nu}K_\nu(\sqrt{i}\,x))$
6.80	$\mathbf{L}_\nu(x)=i^{-\nu-1}\mathbf{H}_\nu(ix)$
6.81	$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$
6.82	$L_\nu(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}M_{\nu+\frac{1}{2},\,0}(x)={}_1F_1(-\nu;1;x)$
6.83	$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{e^xx^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}),\ L_n^0(x)=L_n(x)$
6.84	$L_\nu^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\nu+1)}x^{-\frac{\alpha+1}{2}}e^{\frac{x}{2}}M_{\frac{\alpha+1}{2}+\nu,\,\frac{\alpha}{2}}(x)$

6.85 $\mathrm{li}\, x = \int_0^x \frac{du}{\ln u} \quad (x < 1)$

6.86 $\ln z = i\varphi + \ln |z|$, où $z = re^{i(\varphi + 2k\pi)}$, $-\pi < \varphi < \pi$

6.87 $M_{\mu,\nu}(x) = x^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \nu - \mu ; 2\nu + 1 ; x\right)$

6.88 $n! = \Pi(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = \Gamma(n+1)$

6.89 $N_\nu(x) = Y_\nu(x)$

6.90 $N_{\mu,\nu}(x) = Y_{\mu,\nu}(x)$

6.91 $Ni_\nu(x) = Yi_\nu(x)$

6.92 $O_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-xu} [(u + \sqrt{u^2+1})^n + (u - \sqrt{u^2+1})^n]\, du$

6.93 $P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$

6.94 $P_\nu(x) = {}_2F_1\left(-\nu, \nu + 1 ; 1 ; \frac{1-x}{2}\right) \quad |1 - x| < 2$

6.95 $P_\nu^m(x) = \begin{cases} (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m P_\nu(x)}{dx^m} & \text{pour } |x| \leqslant 1, \\ (x^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m P_\nu(x)}{dx^m} & \text{pour } |x| > 1 \end{cases}$

6.96 $P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(-\nu, \nu + 1 ; 1 - \mu ; \frac{1-x}{2}\right)$,

$|x - 1| < 2$

6.96[a] $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(1 + \alpha + n)}{n!\, \Gamma(1+\alpha)} {}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1 ; \alpha + 1 ; \frac{1-x}{2}\right)$

6.97 $P(x, \nu) = \int_0^x e^{-u} u^{\nu-1}\, du = \Gamma(\nu) - \Gamma(\nu, x) = \gamma(\nu, x)$

6.98 $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(-\nu, \nu + 1 ; 1 - \mu ; \frac{1-z}{2}\right)$

z est un point du plan complexe muni d'une coupure le long de l'axe réel de $-\infty$ à $+1$

6.99 $\mathfrak{P}_\nu(z) = \mathfrak{P}_\nu^0(z)$

6.100 $P_\nu(x) = P_\nu^0(x)$

6.101 $Q_n(x)=\frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n \ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}P_n(x),\ |x|>1$

6.102 $Q_\nu(x)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}x^{-\nu-1}{}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+1,\frac{\nu+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{x^2}\right)$

6.103 $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}e^{i\mu\pi}\Gamma(\mu+\nu+1)z^{-\mu-\nu-1}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\times$

$\times{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+1}{2},\frac{\mu+\nu+2}{2};\nu+\frac{3}{2};z^{-2}\right)$

z est un point du plan complexe muni d'une coupure le long de l'axe réel de $-\infty$ à $+1$

6.104 $\mathfrak{Q}_\nu(z)=\mathfrak{Q}_\nu^0(z)$

6.105 $Q_\nu(x)=Q_\nu^0(x)$

6.106 $Q_\nu^\mu(x)=e^{\pi i\mu}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}(x^2-1)^{\frac{\mu}{2}}x^{-\mu-\nu-1}\times$

$\times{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1,\frac{\mu+\nu+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{x^2}\right),\ |x|>1$

6.107 $Q_\nu^\mu(x)=\frac{1}{2}e^{-i\mu\pi}\left[e^{-\frac{i\pi\mu}{2}}\mathfrak{Q}_\nu^\mu(x+i0)+e^{\frac{i\pi\mu}{2}}\mathfrak{Q}_\nu^\mu(x-i0)\right],\ |x|<1$

6.108 $Q_\nu^m(x)=\begin{cases}(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m}, & |x|\leqslant 1\\ (x^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m}, & |x|>1\end{cases}$

6.109 $Q^{\nu,\rho}(x)=\sqrt{\pi}\,2^{2\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\rho+2\nu+2k)}{k!\,\Gamma(\rho+\nu+k+1)}(2x)^{-\rho-2\nu-2k}$

6.110 $Q(x,\nu)=\int_x^\infty e^{-u}u^{\nu-1}\,du=\Gamma(\nu,x)$

6.111 $S(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du$

6.112 $S(\nu,x)=\int_0^\infty\frac{e^{-xu}\,du}{(1+u)^\nu}=x^{\nu-1}e^x\int_x^\infty e^{-\xi}\xi^{-\nu}\,d\xi$

6.113	$s_1(x)=\frac{1}{3}(e^{-x}+e^{-\varepsilon x}+e^{-\varepsilon 2x})$
6.114	$s_2(x)=\frac{1}{3}(e^{-x}+\varepsilon e^{-\varepsilon x}+\varepsilon^2 e^{-\varepsilon 2x})$
6.115	$s_3(x)=\frac{1}{3}(e^{-x}+\varepsilon^2 e^{-\varepsilon x}+\varepsilon e^{-\varepsilon 2x})$ $\varepsilon\neq 1$ et $\varepsilon^3=1$
6.116	$S_n(x)=\int\limits_0^\infty e^{-xu}\left[(u+\sqrt{u^2+1})^n-(u-\sqrt{u^2+1})^n\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$
6.117	$\mathrm{se}_{2n+1}(z,\ q)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{(2n+1)}\sin(2k+1)z$
6.118	$\mathrm{se}_{2n}(z,\ q)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} B_{2k}^{(2n)}\sin(2kz)$
6.119	$\mathrm{Se}_{2n}(z,\ q)=-i\,\mathrm{se}_{2n}(iz,\ q)$
6.120	$\mathrm{Se}_{2n+1}(z,\ q)=-i\,\mathrm{se}_{2n+1}(iz,\ q)$
6.121	$\mathrm{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
6.122	$\mathrm{shi}(x)=\int\limits_0^x\frac{\mathrm{sh}\,u}{u}du$
6.123	$\mathrm{si}(x)=-\int\limits_x^\infty\frac{\sin u}{u}du$
6.123a	$\mathrm{Si}(x)=\int\limits_0^x\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}+\mathrm{si}(x)$
6.124	$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
6.125	$\mathrm{sign}\,x\begin{cases}-1 \text{ pour } x<0,\\ 0 \text{ pour } x=0,\\ 1 \text{ pour } x>0\end{cases}$
6.126	$\mathrm{stei}_\nu(x)=\mathrm{Im}\,(H_\nu(i\sqrt{i}\,x))$
6.127	$\mathrm{ster}_\nu(x)=\mathrm{Re}\,(H_\nu(i\sqrt{i}\,x))$
6.128	$s_{\mu,\nu}(x)=\frac{x^{\mu+1}}{(\mu+\nu+1)(\mu-\nu+1)}\times$ $\times\,{}_1F_2\left(1;\frac{\mu+\nu+3}{2};\ \frac{\mu-\nu+3}{2};\ -\frac{x^2}{4}\right)$

6.129 $S_{\mu,\nu}(x)=s_{\mu,\nu}(x)+2^{\mu-1}\,\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\times$

$\times\frac{1}{\sin\pi\nu}\left[\cos\left(\frac{\mu-\nu}{2}\pi\right)J_{-\nu}(x)-\cos\left(\frac{\mu+\nu}{2}\pi\right)J_{\nu}(x)\right]$

6.130 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)=\frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\right]$

6.131 $T_{\alpha}^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+n+1)}$

6.132 $U(x,\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2k\alpha-\frac{k^2}{x}}\right]$

6.133 $U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$

6.134 $U_{\nu}(w,x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{w}{x}\right)^{\nu+2m}J_{\nu+2m}(x)$

6.135 $V_{\nu}(w,x)=\cos\left(\frac{w}{2}+\frac{x^2}{2w}+\frac{\pi\nu}{2}\right)+U_{2-\nu}(w,x)$

6.136 $W_{\mu,\nu}(x)=\frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\nu\right)}M_{\mu,\nu}(x)+\frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\nu\right)}M_{\mu,-\nu}(x)$

6.137 $Y_{\nu}(x)=\frac{\cos\pi\nu J_{\nu}(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$

6.138 $Yi_{\nu}(x)=\int_x^{\infty}\frac{Y_{\nu}(u)}{u}\,du$

6.139 $Y_{\mu,\nu}(x)=\frac{x^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2\nu+1)}M_{\mu,\nu}(x)$

6.140 $[x]=n$ pour $n\leqslant x<n+1$

6.141 $\gamma=e^C=1{,}781072\ldots$

6.142 $\Gamma(\nu,x)=\int_x^{\infty}u^{\nu-1}e^{-u}du=Q(x,\nu)$

6.142[a]	$\Gamma(\nu)=\int_0^{\infty} u^{\nu-1}e^{-u}\,du=\Pi(\nu-1)$
6.143	$\gamma(\nu, x)=\Gamma(\nu)-\Gamma(\nu, x)=P(x, \nu)$
6.144	$\gamma_n(w, x)=i^{-n}U(iw, ix)$
6.145	$\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_n=2\ (n=1, 2, \ldots)$
6.146	$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$
6.146[a]	$\zeta(x, \nu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\nu)^x}$
6.147	$\vartheta_0(v, x)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\pi^2k^2x}\cos 2\pi kv$
6.148	$\vartheta_1(v, x)=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-\pi^2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2x}\sin\pi(2k+1)v$
6.149	$\vartheta_2(v, x)=2\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\pi^2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2x}\cos\pi(2k+1)v$
6.150	$\vartheta_3(v, x)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\pi^2k^2x}\cos 2\pi kv$
6.151	$\hat{\vartheta}_0(v, x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{1}{x}\left(v+k+\frac{1}{2}\right)^2}-\sum_{k=-1}^{-\infty}e^{-\frac{1}{x}\left(v+k+\frac{1}{2}\right)^2}\right]$
6.152	$\hat{\vartheta}_1(v, x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{1}{x}\left(v+k-\frac{1}{2}\right)^2}-\right.$ $\left.-\sum_{k=-1}^{-\infty}(-1)^k e^{-\frac{1}{x}\left(v+k-\frac{1}{2}\right)^2}\right]$

6.153	$\hat{\vartheta}_2(v, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{1}{x}(v+k)^2} - \sum_{k=-1}^{-\infty}(-1)^k e^{-\frac{1}{x}(v+k)^2}\right]$
6.154	$\hat{\vartheta}_3(v, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{x}(v+k)^2} - \sum_{k=-1}^{-\infty} e^{-\frac{1}{x}(v+k)^2}\right]$
6.155	$\theta_n(w, x) = i^{-n} V_n(iw, ix)$
6.156	$\lambda(e^x, a) = \int_0^a e^{-xu}\Gamma(u+1)\,du$
6.157	$\Lambda_n = \begin{cases} \ln q \text{ pour } n = q^m, \text{ où } q \text{ est un nombre premier}, m > 0, \\ 0, \text{ dans les autres cas} \end{cases}$
6.158	$\mu(x, a) = \int_0^{\infty} \frac{x^u u^a}{\Gamma(u+1)}\,du$
6.159	$\mu(x, a, b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{u+b} u^a}{\Gamma(u+b+1)}\,du$
6.160	$\nu(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^u\,du}{\Gamma(u+1)} = \int_1^{\infty} \frac{x^{u-1}\,du}{\Gamma(u)}$
6.161	$\nu(x, a) = \int_a^{\infty} \frac{x^u\,du}{\Gamma(u+1)}$
6.162	$\nu i(x, a) = \int_0^{x} \frac{\nu(u, a)}{u}\,du$
6.163	$\xi(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+it\right)}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$
6.164	$\Pi(x) = \Gamma(x+1)$
6.165	$\Phi(z, s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(v+n)^s}$

6.166	$\Psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n), \quad x > 0$
6.167	$\psi(x, y) = \dfrac{x}{2\sqrt{\pi y^3}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$
6.168	$\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$
6.169	$\omega(x) = \ln \Gamma(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \ln x + x - \ln \sqrt{2\pi}$
6.170	$\chi(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$

CHAPITRE VII

DÉVELOPPEMENT DE FOURIER EN SÉRIE DE COSINUS

§ 1. Formules fondamentales

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.1	$F_c(t)$	$\frac{\pi}{2} f(u)$
7.2	$f(at)$, $a>0$	$a^{-1}F_c(a^{-1}u)$
7.3	$f(at)\cos(bt)$ $(a,\ b>0)$	$\frac{1}{2a}\left[F_c\left(\frac{u+b}{a}\right)+F_c\left(\frac{u-b}{a}\right)\right]$
7.4	$f(at)\sin(bt)$ $(a,\ b>0)$	$\frac{1}{2a}\int_0^\infty f(t)\sin\left(\frac{u+b}{a}t\right)dt-\frac{1}{2a}\int_0^\infty f(t)\sin\left(\frac{u-b}{a}t\right)dt$
7.5	$t^{2n}f(t)$	$(-1)^n\frac{d^{2n}}{du^{2n}}F_c(u)$
7.6	$t^{2n+1}f(t)$	$(-1)^n\frac{d^{2n+1}}{du^{2n+1}}\int_0^\infty f(t)\sin(tu)\,dt$

§ 2. Fonctions rationnelles et irrationnelles

7.7	$\begin{cases} 1 \text{ pour } 0<t<a, \\ 0 \text{ pour } t>a \end{cases}$	$u^{-1}\sin(au)$
7.8	$t^{-\frac{1}{2}}$	$\pi^{\frac{1}{2}}(2u)^{-\frac{1}{2}}$
7.9	$\begin{cases} 0 \text{ pour } 0<t<b, \; n=1, 2, 3, \ldots \\ (a+t)^{-n} \text{ pour } t>b \end{cases}$ $n=1, 2, 3, \ldots$	$\sum\limits_{m=1}^{n-1}\frac{(m-1)!}{(n-1)!}(a+b)^{-m}(-u)^{n-m-1}\sin\left[\frac{\pi}{2}(n-m)-bu\right]-$ $-\frac{(-u)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\sin\left(au+\frac{\pi n}{2}\right)\mathrm{Ci}(au+bu)-\right.$ $\left.-\cos\left(au+\frac{\pi n}{2}\right)\mathrm{si}(au+bu)\right]$
7.10	$t^{2m}(t^2+z)^{-n-1}$	$\frac{1}{2}(-1)^{m+n}\pi(n!)^{-1}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{m-\frac{1}{2}}e^{-uz^{\frac{1}{2}}}\right)$
7.11	$t^{2m}(a^{2n}+t^{2n})^{-1}$, $n>m\geqslant 0$, $n, m=1, 2, 3, \ldots$	$\frac{\pi}{2n}a^{2m-2n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{-au\sin\left[(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right]}\times$ $\times\sin\left\{\frac{1}{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)(2m+1)\pi+au\cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]\right\}$
7.12	$t^{-\nu}$, $0<\mathrm{Re}\,\nu<1$	$\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\Gamma(1-\nu)u^{\nu-1}$
7.13	$\begin{cases} t^{\nu-1} \text{ pour } 0<t<a, \\ 0 \text{ pour } t>a, \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu>0$	$\frac{1}{2}a^{\nu}\nu^{-1}[{}_1F_1(\nu;\,\nu+1;\,iau)+{}_1F_1(\nu;\,\nu+1;\,-iau)]$
7.14	$\begin{cases} (a-t)^{\nu} \text{ pour } 0<t<a, \\ 0 \text{ pour } t>a, \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\frac{1}{2}iu^{-\nu-1}\left[e^{i\left(au+\frac{\pi\nu}{2}\right)}\gamma(\nu+1,\,iau)-e^{-i\left(au+\frac{\pi\nu}{2}\right)}\gamma(\nu+1,\,-iau)\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.15	$\begin{cases} t^{\nu}(a-t)^{\nu} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\nu+1)\left(\frac{2u}{a}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}}\cos(au)\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(au)$
7.16	$\begin{cases} t^{\nu-1}(a-t)^{\mu-1} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}(\nu,\mu)>0$	$\frac{1}{2}B(\nu,\mu)\,a^{\nu+\mu-1}\,[{}_1F_1(\nu;\ \nu+\mu;\ iau)+$ $+{}_1F_1(\nu;\ \nu+\mu;\ -iau)]$
7.17	$t^{\nu}(a+t)^{-1}, \quad -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$(2a)^{\nu}(a\pi u)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\nu\right)}S_{-\nu-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}(au)-\right.$ $\left.-2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}S_{-\nu-\frac{3}{2},\,\frac{1}{2}}(au)\right\}$
7.18	$t^{\nu}(a^2+t^2)^{-1}, \quad -1<\operatorname{Re}\nu<2$	$\frac{1}{2}\pi a^{\nu-1}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\operatorname{ch}(au)+\pi^{\frac{1}{2}}2^{\nu-2}u^{1-\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}\right)\times$ $\times\left[\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}{}_1F_2\left(1;\ 1-\frac{\nu}{2};\ \frac{3}{2}-\frac{\nu}{2};\ \frac{a^2u^2}{4}\right)$
7.19	$(a^2+t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2a}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\right]^{-1}K_{\nu}(au)$

7.20	$\begin{cases} (a^2-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$2^{\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)a^{\nu}u^{-\nu}J_{\nu}(au)$
7.21	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ (t^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{u}{2a}\right)^{\nu}Y_{\nu}(au)$
7.22	$\begin{cases} t(a^2-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$-a^{\nu+1}u^{-\nu}s_{\nu-1,\ \nu+1}(au)$
7.23	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ t(t^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $0<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$2^{-\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}a^{1-\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)u^{\nu}J_{\nu-1}(au)$
7.24	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ t^{-1}(t^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } t>1, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\pi\sec(\pi\nu)\,a^{-2\nu-1}\left\{1-\frac{\pi au}{2}\left[J_{\nu}(au)\,\mathbf{H}_{\nu-1}(au)-\mathbf{H}_{\nu}(au)\,J_{\nu-1}(au)\right]\right\}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.25	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < 2a, \\ (t^2-2at)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } t > 2a, \end{cases}$ $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(2a)^{-\nu}u^{\nu}[J_\nu(au)\sin(au)+$ $+Y_\nu(au)\cos(au)]$
7.26	$(t^2+2at)^{-\nu-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2a}\right)^{\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)[Y_\nu(au)\cos(au)-$ $-J_\nu(au)\sin(au)]$
7.27	$\begin{cases} (2at-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0 < t < 2a, \\ 0 & \text{pour } t > 2a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{u}{2a}\right)^{-\nu}\cos(au)J_\nu(au)$
7.28	$[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^{-\nu}, \operatorname{Re}\nu > 0$	$\pi\nu\operatorname{cosec}(\pi\nu)\,a^{-\nu}u^{-1}\left\{I_\nu(au)\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)+\right.$ $\left.+\frac{i}{2}[J_\nu(iau)-J_\nu(-iau)]\right\}$
7.29	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^{-\nu}, \operatorname{Re}\nu > -1$	$\pi\operatorname{cosec}(\pi\nu)\,a^{-\nu}\left[\frac{1}{2}J_\nu(iau)+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}J_\nu(-iau)-\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)I_\nu(au)\right]$

7.30	$t^{-\frac{1}{2}}(a^2+{}^2)^{-\frac{1}{2}}[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^{\nu}$, $\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$	$\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}a^{\nu}I_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)K_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)$
7.31	$t^{-\frac{1}{2}}(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]^{\nu}$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}$	$\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}a^{\nu}I_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)K_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)$
7.32	$t^{-\nu-\frac{1}{2}}(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+a]^{\nu}$, $\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}\right)(2u)^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{\nu}{2},\frac{1}{4}}(au)M_{-\frac{\nu}{2},-\frac{1}{4}}(au)$
7.33	$t^{\nu-\frac{1}{2}}(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-a]^{-\nu}$, $\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}\right)(2u)^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{\nu}{2},\frac{1}{4}}(a)M_{-\frac{\nu}{2},-\frac{1}{4}}(au)$
7.34	$[(a+it)^{\nu}+(a-it)^{\nu}]$	$\pi[\Gamma(-\nu)]^{-1}u^{-\nu-1}e^{-au}$
7.35	$t^{2n}[(a+it)^{-\nu}+(a-it)^{-\nu}]$, $0\leqslant 2n<\operatorname{Re}\nu$	$\pi(-1)^n(2n)!\,[\Gamma(\nu)]^{-1}e^{-au}u^{\nu-2n-1}L_{2n}^{(\nu-2n-1)}(au)$
7.36	$t^{2n-1}[(a-it)^{-\nu}-(a+it)^{-\nu}]$, $1\leqslant n<\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{Re}\nu}{2}$	$i\pi(-1)^n(2n-1)!\,[\Gamma(\nu)]^{-1}e^{-au}u^{\nu-2n}L_{2n-1}^{(\nu-2n)}(au)$
7.37	$(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\{[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^{\nu}+[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]^{\nu}\}$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$2a^{\nu}\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)K_{\nu}(au)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.38	$(2at+t^2)^{-\frac{1}{2}}\{[a+t+(2at+t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}+$ $+[a+t-(2at+t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}\}$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\pi a^{\nu}\left[\sin\left(au-\frac{\pi\nu}{2}\right)J_{\nu}(au)-\cos\left(au-\frac{\pi\nu}{2}\right)Y_{\nu}(au)\right]$
7.39	$\begin{cases}(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\{[t+i(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}+ & \\ +[t-i(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}\} & \text{pour } 0<t<a \\ 0 & \text{pour } t>a\end{cases}$	$\frac{\pi}{2}a^{\nu}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)[\boldsymbol{J}_{\nu}(au)+\boldsymbol{J}_{-\nu}(au)]$
7.40	$\begin{cases}t^{-\nu-\frac{1}{2}}(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\times\{[a+(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}+ & \\ +[a-(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}\} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$(2a)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2},\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\times$ $\times\,{}_1F_1\left(\frac{1}{1}-\frac{\nu}{2};\frac{1}{2};-iau\right){}_1F_1\left(\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2};\frac{1}{2};iau\right)$
7.41	$\begin{cases}t^{\nu}(a^2-t^2)^{\mu} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $\operatorname{Re}(\mu,\nu)>-1$	$\frac{1}{2}a^{\nu+2\mu+1}\,\mathrm{B}\left(\mu+1,\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\times$ $\times\,{}_1F_2\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2};\frac{1}{2},\mu+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{2};\frac{-a^2u^2}{4}\right)$

7.42	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ (t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\{[t+(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}+ \\ +[t-(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}\} & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$-\pi a^{\nu}\left[\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)J_{\nu}(au)+\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)Y_{\nu}(au)\right]$
7.43	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ t^{-\frac{1}{2}}(t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\{[t+(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}+ \\ +[t-(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}\} & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}\pi a^{\nu}\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[J_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)Y_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)+\right.$ $\left.+J_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)Y_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)\right]$
7.44	$t^{2n}(a^2+t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}},\quad 0\leqslant n<\frac{1}{2}+\operatorname{Re}\nu$	$(-1)^n\pi^{\frac{1}{2}}(2a)^{-\nu}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\right]^{-1}\cdot\frac{d^{2n}}{du^{2n}}[u^{\nu}K_{\nu}(au)]$
7.45	$t^{\nu}(a^2+t^2)^{-\mu-1},\quad -1<\operatorname{Re}\nu<2+2\operatorname{Re}\mu$	$\frac{a^{\nu-2\mu-1}}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}+\mu\right)\times$ $\times{}_1F_2\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2};\ \frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\mu,\ \frac{1}{2};\ \frac{a^2u^2}{4}\right)+$ $+\pi^{\frac{1}{2}}2^{\nu-2\mu-2}\left[\Gamma\left(1+\mu-\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\times$ $\times u^{1+2\mu-\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}-\mu\right)\times$ $\times{}_1F_2\left(\mu+1;\ \mu+1-\frac{\nu}{2},\ \mu+\frac{3}{2}-\frac{\nu}{2};\ \frac{a^2u^2}{4}\right)$

§ 3. Fonctions exponentielles

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.46	$t^{n-\frac{1}{2}}e^{-at}$	$(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n}{da^n}\{(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}[(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-a]^{-\frac{1}{2}}\}$
7.47	$t^{\nu-1}e^{-at}$	$\Gamma(\nu)(a^2+u^2)^{-\frac{\nu}{2}}\cos\left[\nu\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)\right]$
7.48	$t^{\nu-1}(e^{at}+1)^{-1}$, $\mathrm{Re}\,\nu>0$	$\Gamma(\nu)\left\{u^{-\nu}\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)+\frac{1}{2}(2a)^{-\nu}\left[\zeta\left(\nu,\frac{1}{2}+i\frac{u}{2a}\right)+\right.\right.$ $\left.\left.+\zeta\left(\nu,\frac{1}{2}-i\frac{u}{2a}\right)-\zeta\left(\nu,i\frac{u}{2a}\right)-\zeta\left(\nu,-i\frac{u}{2a}\right)\right]\right\}$
7.49	$t^{\nu-1}(e^{at}-1)^{-1}$, $\mathrm{Re}\,\nu>1$	$\frac{1}{2}a^{-\nu}\Gamma(\nu)\left[\zeta\left(\nu,1+i\frac{u}{a}\right)+\zeta\left(\nu,1-i\frac{u}{a}\right)\right]$
7.50	e^{-at^2}	$\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u^2}{4a}}$
7.51	$t^{\frac{1}{2}}e^{-at^2}$	$\frac{1}{4}\pi\left(\frac{u}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{u^2}{8a}}\left[I_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{u^2}{8a}\right)-I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{u^2}{8a}\right)\right]$
7.52	$t^{-\frac{1}{2}}e^{-at^2}$	$\frac{\pi}{2}\left(\frac{u}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{u^2}{8a}}I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{u^2}{8a}\right)$

7.53	$t^{-2n}e^{-a^2t^2}$	$(-1)^n\pi^{\frac{1}{2}}2^{-n-1}a^{-2n-1}e^{-\frac{u^2}{4a^2}}\mathrm{He}_{2n}\left(2^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{u}{a}\right)$
7.54	$(b^2+t^2)^{-1}e^{-a^2t^2}$	$\frac{1}{4}\frac{\pi}{b}e^{a^2b^2}\left[e^{-bu}\operatorname{erfc}\left(ab-\frac{u}{2a}\right)+e^{bu}\operatorname{erfc}\left(ab+\frac{u}{2a}\right)\right]$
7.55	$t^{\nu-1}e^{-at-bt^2}$, $\mathrm{Re}\,\nu>0$	$\frac{\Gamma(\nu)}{2}(2b)^{-\frac{\nu}{2}}e^{\frac{a^2-u^2}{8b}}\{e^{-\frac{iau}{4b}}D_{-\nu}[(2b)^{-\frac{1}{2}}(a-iu)]+$ $+e^{\frac{iau}{4b}}D_{-\nu}[(2b)^{-\frac{1}{2}}(a+iu)]\}$
7.56	$t^{\nu-1}e^{-at-\frac{b^2}{t}}$	$b^\nu\{(a+iu)^{-\frac{\nu}{2}}K_\nu[2b(a+iu)^{\frac{1}{2}}]+$ $+(a-iu)^{-\frac{\nu}{2}}K_\nu[2b(a-iu)^{\frac{1}{2}}]\}$
7.57	$t^{\nu-1}e^{-a\sqrt{t}}$, $\mathrm{Re}\,\nu>0$	$\Gamma(2\nu)(2u)^{-\nu}\{e^{-i\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{a^2}{8u}\right)}D_{-2\nu}\left[\frac{a}{2}u^{-\frac{1}{2}}(1-i)\right]+$ $+e^{i\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{a^2}{8u}\right)}D_{-2\nu}\left[\frac{a}{2}u^{-\frac{1}{2}}(1+i)\right]\}$
7.58	$e^{-b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}}$	$ab(b^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}K_1[a(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$
7.59	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}}$	$K_0[a(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.60	$t^{\nu-\frac{1}{2}}(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}[(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+a]^{-\nu}e^{-b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}\right)a^{-1}(2u)^{-\frac{1}{2}}M_{\frac{\nu}{2},\,-\frac{1}{4}}\{a[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-b]\}\times W_{-\frac{\nu}{2},\,\frac{1}{4}}\{a[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+b]\}$
7.61	$e^{-at}(1-e^{-bt})^{\nu-1}$, $\operatorname{Re}a, b>0$; $\operatorname{Re}\nu>0$	$\frac{1}{2b}\left[\mathrm{B}\left(\nu,\frac{a-iu}{b}\right)+\mathrm{B}\left(\nu,\frac{a-iu}{b}\right)\right]$
7.62	$t^{\nu}e^{-at^2}$, $\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{a^{-\frac{1}{2}(1+\nu)}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right){}_1F_1\left[\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2};\frac{1}{2};\frac{u^2}{4a}\right]$

§ 4. Fonctions trigonométriques

7.63	$t^{-1}\sin(at)$	$\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{pour } u<a,\\ \frac{\pi}{4} & \text{pour } u=a,\\ 0 & \text{pour } u>a\end{cases}$
7.64	$t^{\nu-1}\sin(at)$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\Gamma(1-\nu)\right]^{-1}\{(u+a)^{-\nu}-\operatorname{sign}(u-a)\lvert u-a\rvert^{-\nu}\}$
7.65	$e^{-bt}\sin(at)$, $a>0$ $\operatorname{Re}b>0$	$\frac{a+u}{2}[b^2+(a+u)^2]^{-1}+\frac{a-u}{2}[b^2+(a-u)^2]^{-1}$

7.66	$\left(\frac{\sin at}{t}\right)^{2m}$, $m=1, 2, 3, \ldots$	$\begin{cases} (-1)^m 2^{-2m} m\pi \{(m!)^{-2} u^{2m-1} + \\ + \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n[(2an+u)^{2m-1} + (\lvert 2an-u \rvert)^{2m-1}]}{(m+n)!\,(m-n)!} \\ \quad \text{pour} \quad u \leqslant 2\,am, \\ 0 \quad \text{pour} \quad u \geqslant 2\,am \end{cases}$
7.67	$\left(\frac{\sin at}{t}\right)^{2m+1}$, $m=0, 1, 2, \ldots$	$(-1)^m \pi 2^{-2m-2} (2m+1) F(a)$, où $F(a) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{[(2n+1)a+u]^{2m} + [(2n+1)a-u]^{2m}}{(m+1+n)!\,(m-n)!}$ pour $0 \leqslant u \leqslant a$, $F(a) = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \frac{[u+(2n+1)a]^{2m} - [u-(2n+1)a]^{2m}}{(m+1+n)!\,(m-n)!} + \sum_{n=k}^{m} (-1)^n \frac{[(2n+1)a+u]^{2m} + [(2n+1)a-u]^{2m}}{(m+1+n)!\,(m-n)!}$ pour $(2k-1)a \leqslant u \leqslant (2k+1)a$, $F(a)=0$ pour $u \geqslant (2m+1)a$, $k=1, 2, 3, \ldots, m$
7.68	$t^{\nu-1} \cos(at)$, $0 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\Gamma(\nu)}{2} \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) [\lvert u-a \rvert^{-\nu} + (u+a)^{-\nu}]$
7.69	$(b^2+t^2)^{-1} \cos(at)$	$\begin{cases} \frac{\pi}{2b} e^{-ab} \operatorname{ch}(bu) \quad \text{pour} \quad u < a, \\ \frac{\pi}{2b} e^{-bu} \operatorname{ch}(ab) \quad \text{pour} \quad u > a \end{cases}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.70	$e^{-bt}\cos(at)$	$\frac{b}{2}\{[b^2+(a-u)^2]^{-1}+[b^2+(a+u)^2]^{-1}\}$
7.71	$e^{-bt^2}\cos(at)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2+u^2}{4b}} \operatorname{ch}\left(\frac{au}{2b}\right)$
7.72	$\begin{cases} \left(\cos\frac{\pi t}{2}\right)^{\nu-1} & \text{pour } 0<t<1,\ \operatorname{Re}\nu>0, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$2^{1-\nu}\Gamma(\nu)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{u}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{u}{\pi}\right)\right]^{-1}$
7.73	$e^{-at^2}\cos(bt^2)$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{4}au^2(a^2+b^2)^{-1}} \times$ $\times\cos\left[\frac{bu^2}{4}(a^2+u^2)^{-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\right]$
7.74	$\sin\left(\frac{a}{t}\right)$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}[\pi Y_1(2\sqrt{au})+2K_1(2\sqrt{au})]$
7.75	$t^{\nu-1}\sin\left(\frac{a}{t}\right), \quad -1<\operatorname{Re}\nu<2$	$\frac{\pi}{2}\left(\frac{u}{a}\right)^{-\frac{\nu}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left[J_\nu(2\sqrt{au})-\right.\right.$ $\left.\left.-\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left[Y_\nu(2\sqrt{au})+\frac{2}{\pi}K_\nu(2a\sqrt{au})\right]\right\}$
7.76	$t^{-1}\cos\left(\frac{a}{t}\right)$	$\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{\pi}K_0(2\sqrt{au})-Y_0(2\sqrt{au})\right]$

7.77	$t^{\nu-1}\cos\left(\frac{a}{t}\right), \quad -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi}{4}\operatorname{cosec}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left(\frac{u}{a}\right)^{-\frac{\nu}{2}}[J_{-\nu}(2\sqrt{au})-$ $-J_{\nu}(2\sqrt{au})+I_{-\nu}(2\sqrt{au})-I_{\nu}(2\sqrt{au})]$
7.78	$e^{-bt}\sin(at^{\frac{1}{2}})$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}a(b^2+u^2)^{-\frac{3}{4}}e^{-\frac{a^2b}{4(b^2+u^2)}}\times$ $\times\cos\left[\frac{a^2u}{4(b^2+u^2)}-\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{b}\right)\right]$
7.79	$t^{\nu-1}e^{-at^{\frac{1}{2}}}\sin\left(at^{\frac{1}{2}}-\frac{\nu\pi}{2}\right), \quad \operatorname{Re}\nu>0$	$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(2u)^{-\nu}e^{-\frac{a^2}{4u}}D_{2\nu-1}(au^{-\frac{1}{2}})$
7.80	$t^{-\nu}\sin(at^{\frac{1}{2}}), \quad 0<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$	$-\frac{a}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)u^{\nu-\frac{3}{2}}\times$ $\times\left[e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{}_1F_1\left(\frac{3}{2}-\nu;\frac{3}{2};-i\frac{a^2}{4u}\right)+\right.$ $\left.+e^{i\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{}_1F_1\left(\frac{3}{2}-\nu;\frac{3}{2};i\frac{a^2}{4u}\right)\right]$
7.81	$t^{-\nu}\cos(at^{\frac{1}{2}}), \quad 0<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{u^{\nu-1}}{2}\Gamma(1-\nu)\,i\left[e^{-i\frac{\nu\pi}{2}}{}_1F_1\left(1-\nu;\frac{1}{2};-i\frac{a^2}{4u}\right)-\right.$ $\left.-e^{i\frac{\nu\pi}{2}}{}_1F_1\left(1-\nu;\frac{1}{2};i\frac{a^2}{4u}\right)\right]$
7.82	$e^{-at^{\frac{1}{2}}}\cos(at^{\frac{1}{2}})$	$a\pi^{\frac{1}{2}}(2u)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{a^2}{2u}}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.83	$\{[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^\nu+[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]^\nu\}\times$ $\times\,(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}\sin[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi}{2}a^\nu\left[\left(\frac{b+u}{b-u}\right)^{\frac{\nu}{2}}+\left(\frac{b-u}{b+u}\right)^{\frac{\nu}{2}}\right]\times$ $\times\left\{\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)J_\nu[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]-\right.$ $\left.-\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)Y_\nu[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]\right\}$, pour $0<u<b$, $-a^\nu\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left[\left(\frac{u+b}{u-b}\right)^{\frac{\nu}{2}}-\left(\frac{u-b}{u+b}\right)^{\frac{\nu}{2}}\right]\times$ $\times K_\nu[a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]$ pour $u>b$
7.84	$\{[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^\nu+[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]^\nu\}\times$	$-\frac{1}{2}\pi a^\nu\left[\left(\frac{b+u}{b-u}\right)^{\frac{\nu}{2}}+\left(\frac{b-u}{b+u}\right)^{\frac{\nu}{2}}\right]\times$ $\times\left\{\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)J_\nu[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]+\right.$ $\left.+\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)Y_\nu[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]\right\}$

	$\times (a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos [b (a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$, $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	pour $0 < u < b$, $a^{\nu} \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left[\left(\frac{u+b}{u-b}\right)^{\frac{\nu}{2}} + \left(\frac{u-b}{u+b}\right)^{\frac{\nu}{2}}\right] \times$ $\times K_{\nu} [a (u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]$ pour $u > b$
7.85	$\begin{cases} (\sin t)^{-\frac{1}{2}} e^{-2a \sin t} & \text{pour } 0 < t < \pi, \\ 0 & \text{pour } t > \pi \end{cases}$	$\pi (\pi a)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi u}{2}\right)\left[I_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+u\right)}(a) \cdot I_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-u\right)}(a) - I_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-u\right)}(a) I_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+u\right)}(a)\right]$
7.86	$\begin{cases} (\cos t)^{-\frac{1}{2}} e^{-2a \cos t} & \text{pour } 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{pour } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\frac{\pi}{2} (\pi a)^{\frac{1}{2}} \left[I_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+u\right)}(a) I_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-u\right)}(a) - I_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+u\right)}(a) I_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-u\right)}(a)\right]$
7.87	$\begin{cases} (\cos t)^{-\frac{1}{2}} e^{-a \sec t} & \text{pour } 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{pour } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\pi^{\frac{1}{2}} D_{u-\frac{1}{2}}(\sqrt{2a})\, D_{-u-\frac{1}{2}}(\sqrt{2a})$

§ 5. Fonctions trigonométriques inverses

7.88	$\begin{cases} \arcsin t & \text{pour } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1 \end{cases}$	$\frac{\pi}{2} u^{-1} [\sin u - \mathbf{H}_0 (u)]$
7.89	$\begin{cases} \arccos t & \text{pour } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1 \end{cases}$	$\frac{\pi}{2} u^{-1} \mathbf{H}_0 (u)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.90	$t^{-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)$	$-\frac{\pi}{2}\operatorname{Ei}(-au)$
7.91	$t^{\nu}(1+t^2)^{\frac{\nu}{2}}\sin(\nu\operatorname{arcctg} t)$, $-1<\operatorname{Re}\nu<0$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\Gamma(\nu+1)\,u^{-\nu-\frac{1}{2}}\left[I_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right)-\right.$ $\left.-I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
7.92	$t^{\nu}(1+t^2)^{\frac{\nu}{2}}\cos(\nu\operatorname{arcctg} t)$, $-1<\operatorname{Ro}\nu<0$	$-\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+1)\,u^{-\nu-\frac{1}{2}}\sin(\nu\pi)\operatorname{ch}\left(\frac{u}{2}\right)\cdot K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)$
7.93	$\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{t}\right)$	$\frac{1}{2}u^{-1}\left[e^{-au}\,\overline{\operatorname{Ei}}(au)-e^{au}\operatorname{Ei}(-au)\right]$
7.94	$\operatorname{arctg}(a^n t^{-n})$, $n=2, 4, 6, \ldots$	$-\frac{\pi}{2}u^{-1}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m e^{-au\sin\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]}\times$ $\times\sin\left[au\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]$

§ 6. Fonctions logarithmiques

n°	$f(t)$	$F_c(u)$
7.95	$\begin{cases}\ln t & \text{pour } 0<t<1,\\ 0 & \text{pour } t>1\end{cases}$	$-u^{-1}\operatorname{Si}(u)$
7.96	$t^{-\frac{1}{2}}\ln t$	$-\left(\frac{2u}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[C+\frac{\pi}{2}+\ln(4u)\right]$

7.97	$\ln\left\|\frac{a+t}{b-t}\right\|$	$u^{-1}\left\{\frac{\pi}{2}[\cos(bu)-\cos(au)]+\cos(bu)\operatorname{Si}(bu)+\right.$ $\left.+\cos(au)\operatorname{Si}(au)-\sin(au)\operatorname{Ci}(au)-\sin(bu)\operatorname{Ci}(bu)\right\}$
7.98	$t^{\nu-1}\ln t,\quad 0<\operatorname{Re}\nu<1$	$\Gamma(\nu)\,u^{-\nu}\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\left[\psi(\nu)-\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)-\ln u\right]$
7.99	$t^{\nu-1}\,e^{-at}\ln t,\quad \operatorname{Re}\nu>0$	$\left\{\cos\left[\nu\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)\right]\left[\psi(\nu)-\frac{1}{2}\ln(a^2+u^2)\right]-\right.$ $\left.-\sin\left[\nu\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)\right]\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)\right\}\Gamma(\nu)\,(a^2+u^2)^{-\frac{\nu}{2}}$
7.100	$\begin{cases}\ln(a^2-t^2) & \text{pour } 0<t<a,\\ 0 & \text{pour } t>a\end{cases}$	$u^{-1}\sin(au)\left[\operatorname{Ci}(2au)-C-\ln\left(\frac{u}{a}\right)\right]-$ $-u^{-1}\cos(au)\operatorname{Si}(2au)$
7.101	$t^{-1}\ln\left(\frac{a+t}{a-t}\right)^2$	$-2\pi\operatorname{si}(au)$
7.102	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}\ln(a^2+t^2)$	$-\left[C+\ln\left(\frac{2u}{a}\right)\right]K_0(au)$
7.103	$\ln(1+a^2t^{-2})$	$\pi u^{-1}(1-e^{-au})$
7.104	$\ln\|1-a^2t^{-2}\|$	$\pi u^{-1}[1-\cos(au)]$
7.105	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<1,\\ t^{-1}\ln[t+(t^2-1)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>1\end{cases}$	$-\frac{\pi}{2}\int_u^\infty t^{-1}\,Y_0(t)\,dt$
7.106	$\begin{cases}(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\ln[(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<t<a,\\ 0 & \text{pour } t>a\end{cases}$	$\frac{\pi^2}{8}Y_0(au)-\frac{\pi}{4}J_0(au)\left[C+\ln\left(\frac{2u}{a}\right)\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.107	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} \ln [t+(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$	$\frac{1}{2}[S_{-1,0}(iau)+S_{-1,0}(-iau)]+\ln a\, K_0(au)$

§ 7. Fonctions hyperboliques

7.108	$[\operatorname{sch}(at)]^{2n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$	$\frac{2^{2n-1}\pi u}{a^2(2n-1)!}\operatorname{csch}\left(\frac{\pi u}{2a}\right)\prod_{m=1}^{n-1}\left[\left(\frac{u}{2a}\right)^2+m^2\right]$
7.109	$[\operatorname{sch}(at)]^{2n+1}\ (n=0,\ 1,\ 2.\ \ldots)$	$\frac{2^{2n-1}\pi}{a\,(2n)!}\operatorname{sch}\left(\frac{\pi u}{2a}\right)\prod_{m=1}^{n}\left[\left(\frac{u}{2a}\right)^2+\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\right]$
7.110	$[\operatorname{sch}(at)]^{\nu},\quad \operatorname{Re}\nu>0$	$2^{\nu-2}a^{-1}[\Gamma(\nu)]^{-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{iu}{2a}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{iu}{2a}\right)$
7.111	$(\operatorname{sh} at)^{-\nu},\quad 0<\operatorname{Re}\nu<1$	$2^{\nu}\pi a^{-1}\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\Gamma(1-\nu)\left[\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}+\frac{iu}{2a}\right)\times\right.$ $\left.\times\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}-\frac{iu}{2a}\right)\right]^{-1}\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{2a}\right)\left[\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{a}\right)-\cos(\pi\nu)\right]^{-1}$
7.112	$\frac{\operatorname{ch}(at)}{\operatorname{ch}(bt)},\quad 0<a<b$	$\frac{\pi}{b}\frac{\cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{2b}\right)}{\cos\left(\frac{\pi a}{b}\right)+\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{b}\right)}$

7.113	$\frac{\operatorname{sh}(at)}{\operatorname{sh}(bt)}$	$\frac{\pi}{2b}\,\frac{\sin\frac{\pi a}{b}}{\cos\frac{\pi a}{b}+\operatorname{ch}\frac{\pi u}{b}}$
7.114	$\frac{\operatorname{sh}(at)}{\operatorname{ch}(bt)},\quad 0<a<b$	$\frac{1}{4b}\left\{2\pi\sin\left(\frac{\pi a}{b}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi a}{b}\right)+\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{b}\right)\right]^{-1}+\right.$ $+\psi\left(\frac{3b-a+iu}{4b}\right)+\psi\left(\frac{3b-a-iu}{4b}\right)-$ $\left.-\psi\left(\frac{3b+a-iu}{4b}\right)-\psi\left(\frac{3b+a+iu}{4b}\right)\right\}$
7.115	$\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{at}{2}\right)}{\operatorname{ch} b+\operatorname{ch}(at)}$	$\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{\cos\left(\frac{bu}{a}\right)}{\operatorname{ch}\frac{b}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi u}{a}}$
7.116	$\frac{\operatorname{sh}(at)}{t\operatorname{ch}(bt)}\quad (a\leqslant b)$	$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{2b}\right)+\sin\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{2b}\right)-\sin\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}\right]$
7.117	$\frac{\operatorname{ch}(at)-\operatorname{ch}(bt)}{t\operatorname{sh}(ct)},\ c\geqslant\max(a,\ b)$	$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi b}{c}\right)+\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{c}\right)}{\cos\left(\frac{\pi a}{c}\right)+\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{c}\right)}\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.118	$e^{-at}[\mathrm{sh}(bt)]^{\nu}$, $\mathrm{Re}\,\nu > -1$, $b\,\mathrm{Re}\,\nu < a$	$2^{-\nu-2}b^{-1}\Gamma(\nu+1)\left\{\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{a-\nu b-iu}{2b}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{a+\nu b-iu}{2b}+1\right)}+\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{a-\nu b+iu}{2b}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{a+\nu b+iu}{2b}+1\right)}\right\}$
7.119	$e^{-bt^2}\,\mathrm{ch}(at)$	$\dfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{a^2-u^2}{4b}}\cos\left(\dfrac{abu}{2}\right)$
7.120	$\cos(a\,\mathrm{sh}\,t)$	$\mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi u}{2}\right)K_{iu}(a)$

§ 8. Polynômes orthogonaux

n°	$f(t)$	$F_c(u)$
7.121	$\begin{cases} P_n(t) & \text{pour } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1 \end{cases}$	$-\dfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}n(n+1)\left[\Gamma\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(1-\dfrac{n}{2}\right)\right]^{-1}\times$ $\times u^{-\frac{1}{2}}s_{-\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}(u)$
7.122	$\begin{cases} P_{2n}(t) & \text{pour } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1 \end{cases}$	$(-1)^n\left(\dfrac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}}J_{2n+\frac{1}{2}}(u)$

7.123	$\begin{cases} t^{\lambda-1} P_n(x) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>0, \end{cases}$ $\operatorname{Re}(\lambda+n)>0$	$\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\lambda} \Gamma(\lambda) \left[\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{n}{2}\right) \right]^{-1} \times$ $\times {}_2F_3\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{n}{2}, 1+\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}; -\frac{u^2}{4}\right)$
7.124	$\begin{cases} P_n(1-2t^2) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$(-1)^n \frac{\pi}{2} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right) J_{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)$
7.125	$\begin{cases} (a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}} T_{2n}\left(\frac{t}{a}\right) & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a \end{cases}$	$(-1)^n \frac{\pi}{2} J_{2n}(au)$
7.126	$\begin{cases} t^{-\frac{1}{2}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} u^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{u}{2}\right) J_{-\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{u}{2}\right)$
7.127	$\begin{cases} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos[a(1-t^2)^{\frac{1}{2}}] T_{2n}(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$(-1)^n \frac{\pi}{2} T_{2n}[u[(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}] J_{2n}[(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]]$
7.128	$(a^2+t^2)^{-\frac{n}{2}} T_n[a(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}]$	$\frac{\pi}{2}[(n-1)!]^{-1} u^{n-1} e^{-au}$
7.129	$T_{2n}[a(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}] J_{2n}[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$	$\begin{cases} (-1)^n (b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} \cos[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] \times \\ \times T_{2n}[(1-u^2b^{-2})] & \text{pour } u<b, \\ 0 & \text{pour } u>b \end{cases}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.130	$\begin{cases} (1-t^2)^{\nu} P_{2n}^{(\nu,\nu)}(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu > -1$	$(-1)^n 2^{\nu-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} [(2n)!]^{-1} \times$ $\times \Gamma(2n+\nu-1)\, u^{-\nu-\frac{1}{2}} J_{2n+\nu+\frac{1}{2}}(u)$
7.131	$e^{-bt^2}\,\mathrm{He}_{2n}(at)$	$\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} b^{-n-\frac{1}{2}} \left(b-\frac{a^2}{2}\right)^n e^{-\frac{u^2}{4b}} \times$ $\times \mathrm{He}_{2n}\left[\frac{au}{2} b^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a^2}{2}-b\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$
7.132	$e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{He}_n(t)\,\mathrm{He}_{n+2m}(t)$	$(-1)^m n! \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} u^{2m} e^{-\frac{u^2}{2}} L_n^{(2m)}(u^2)$
7.133	$e^{-at} t^{\nu-2n} L_{2n-1}^{(\nu-2n)}(at)$, $\operatorname{Re}\nu > 2n-1$	$\frac{i}{2}(-1)^{n+1}\Gamma(\nu)\,[(2n-1)!]^{-1} \times$ $\times u^{2n-1}\,[(a-iu)^{-\nu}-(a+iu)^{-\nu}]$
7.134	$t^{2m} e^{-\frac{t^2}{2}} L_n^{(2m)}(t^2)$	$(-1)^m \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (n!)^{-1} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{He}_n(u)\,\mathrm{He}_{n+2m}(u)$
7.135	$t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} L_n^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{t^2}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} u^{2n} e^{-\frac{u^2}{2}} L_n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{u^2}{2}\right)$

7.136	$e^{-\frac{t^2}{2}} L_n\left(\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{He}_{2n}\left(\frac{t}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} L_n\left(\frac{u^2}{2}\right) \mathrm{He}_{2n}\left(\frac{u}{2}\right)$
7.137	$e^{-\frac{t^2}{2}} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{t^2}{2}\right) L_n^{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)}\left(\frac{t^2}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{u^2}{2}\right) L_n^{\left(-\alpha-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{u^2}{2}\right)$

§ 9. Fonctions gamma et fonctions associées

7.138	$\lvert\Gamma(a+it)\rvert^2$	$\pi 2^{-2a}\Gamma(2a)\left[\mathrm{sch}\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{2a}$
7.139	$\lvert\Gamma(a+ibt)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-a+ibt\right)\rvert^2$, $0<\mathrm{Re}\,a<\frac{1}{2}$	$(\pi b)^{-1}\operatorname{cosec}(2\pi a)\,P_{2a-1}\left[\mathrm{ch}\left(\frac{u}{2b}\right)\right]$
7.140	$\left\lvert\Gamma\left(\frac{1}{4}+ibt\right)\right\rvert^4$	$2\pi^{-2}b^{-1}\,\mathrm{sch}\left(\frac{u}{4b}\right) K\left(\mathrm{th}\frac{u}{4b}\right)$
7.141	$[\Gamma(\alpha+bt)\,\Gamma(\alpha-bt)]^{-1}$	$\begin{cases} 2^{2\alpha-3}[\Gamma(2\alpha-1)]^{-1}\cdot\frac{1}{b}\left[\cos\left(\frac{u}{2b}\right)\right]^{2\alpha-2} & \text{pour } 0<u<\pi b, \\ 0 & \text{pour } u>\pi b \end{cases}$
7.142	$\psi(t+1)-\ln t$	$\frac{1}{2}\left[\psi\left(1+\frac{u}{2\pi}\right)-\ln\left(\frac{u}{2\pi}\right)\right]$
7.143	$\psi\left(\frac{1}{2}+it\right)+\psi\left(\frac{1}{2}-it\right)-2\ln t$	$\pi\left[u^{-1}-\frac{1}{2}\,\mathrm{csch}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
7.144	$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$	$2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\pi n^4 e^{-\frac{9}{4}u}-3n^2 e^{-\frac{5}{2}u}\right)\exp\{-n^2\pi e^{-2u}\}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int\limits_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.145	$(1+4t^2)^{-1}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$	$\frac{\pi}{4}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{1}{4}\vartheta_3\left(0,\ \frac{1}{\pi}e^{-2u}\right)\right]$

§ 10. Fonctions intégrales

n°	$f(t)$	$F_c(u)$
7.146	$\operatorname{Ei}(-at)$	$-\frac{1}{u}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)$
7.147	$e^{-at}\operatorname{Ei}(-bt),\quad a\geqslant -b$	$-(a^2+u^2)^{-1}\left\{\frac{a}{2}\ln\left[\frac{(a+b)^2+u^2}{b^2}\right]+u\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a+b}\right)\right\}$
7.148	$e^{-at}\overline{\operatorname{Ei}}(bt),\quad a\geqslant b$	$-(a^2+u^2)^{-1}\left\{\frac{a}{2}\ln\left[\frac{(a-b)^2+u^2}{b^2}\right]+u\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a-b}\right)\right\}$
7.149	$e^{at^2}\operatorname{Ei}(-at^2)$	$-\frac{1}{2}\pi^{\frac{3}{2}}a^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{u^2}{4a}}\operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2}a^{-\frac{1}{2}}\right)$
7.150	$e^{a\operatorname{ch}t}\operatorname{Ei}(-a\operatorname{ch}t)$	$\frac{\pi^2}{2}[\operatorname{csch}(\pi u)]^2[I_{iu}(a)+I_{-iu}(a)-$ $-e^{\frac{\pi u}{2}}J_{iu}(ia)-e^{-\frac{\pi u}{2}}J_{-iu}(ia)]$
7.151	$\operatorname{si}(at)$	$-\frac{1}{2u}\ln\left\lvert\frac{u+a}{u-a}\right\rvert,\quad u\neq a$
7.152	$e^{-bt}\operatorname{si}(at)$	$-\frac{1}{2(b^2+u^2)}\left\{\frac{u}{2}\ln\left[\frac{b^2+(u+a)^2}{b^2+(u-a)^2}\right]-b\operatorname{arctg}\left(\frac{2ab}{b^2-a^2+u^2}\right)+\pi b\right\}$

7.153	$\mathrm{Ci}\,(at)$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<u<a, \\ -\dfrac{\pi}{2u} & \text{pour } u>a \end{cases}$
7.154	$e^{-at}\,\mathrm{Ci}\,(bt)$	$-\dfrac{1}{4(a^2+u^2)}\left\{a \ln\left[\left(1+\dfrac{a^2-u^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{4a^2u^2}{b^4}\right]+ +2u\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{2au}{a^2+b^2-u^2}\right)\right\}$
7.155	$\mathrm{si}\,(at^2)$	$\dfrac{\pi}{u}\left[S\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)-C\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)\right]$
7.156	$\mathrm{Ci}\,(at^2)$	$-\dfrac{\pi}{u}\left[C\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)+S\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)\right]$
7.157	$\dfrac{1}{2}-S\,(at)$	$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} u^{-1}(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left[a-(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} & \text{pour } u<a, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} u^{-1}(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\left[u-(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} & \text{pour } u>a \end{cases}$
7.158	$\dfrac{1}{2}-C\,(at)$	$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} u^{-1}(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left[a-(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} & \text{pour } u<a, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} u^{-1}(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\left[u+(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} & \text{pour } u>a \end{cases}$
7.159	$\dfrac{1}{2}-S\,(at^2)$	$\dfrac{1}{u}\left[C\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)\cos\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)+S\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)\sin\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)\right]$
7.160	$\dfrac{1}{2}-C\,(at^2)$	$\dfrac{1}{u}\left[C\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)\sin\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)-S\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)\cos\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)\right]$
7.161	$t^{-1}\,S\,(at^2)$	$\dfrac{1}{4}\left[\mathrm{si}\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)-\mathrm{Ci}\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.162	$t^{-1}C(at^2)$	$-\frac{1}{4}\left[\mathrm{Ci}\left(\frac{u^2}{4a}\right)+\mathrm{si}\left(\frac{u^2}{4a}\right)\right]$
7.163	$S(at^{-1})$	$\frac{1}{4u}\{\sin[2(au)^{\frac{1}{2}}]-\cos[2(au)^{\frac{1}{2}}]+e^{-2(au)^{\frac{1}{2}}}\}$
7.164	$C(at^{-1})$	$\frac{1}{4u}\{\sin[2(au)^{\frac{1}{2}}]+\cos[2(au)^{\frac{1}{2}}]-e^{-2(au)^{\frac{1}{2}}}\}$

§ 11. Fonctions cylindriques

n°	$f(t)$	$F_c(u)$
7.165	$J_{2n}(at),\quad n=0,1,2,\ldots$	$\begin{cases}(-1)^n(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}T_{2n}\left(\frac{u}{2}\right) & \text{pour } 0<u<a,\\ 0 & \text{pour } u>a\end{cases}$
7.166	$J_\nu(at),\quad \mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\begin{cases}(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\left[\nu\arcsin\left(\frac{u}{a}\right)\right] & \text{pour } 0<u<a,\\ -a^\nu\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}[u+(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu} & \text{pour } u>a\end{cases}$

7.167	$t^{\nu} J_{\nu}(at), \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$	$\begin{cases} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2a)^{\nu}(a^2-u^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<u<a, \\ -\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2a)^{\nu}\sin(\pi\nu)(u^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } u>a \end{cases}$
7.168	$t^{-\nu} J_{\nu}(at), \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\begin{cases} \pi^{\frac{1}{2}} (2a)^{-\nu}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\right]^{-1}(a^2-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<u<a, \\ 0 & \text{pour } u>a \end{cases}$
7.169	$t^{-\nu} J_{\nu+2n}(at), \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\begin{cases} (-1)^n 2^{\nu-1} a^{-\nu}(2n)!\,\Gamma(\nu)\left[\Gamma(2\nu+2n)\right]^{-1}\times \\ \times(a^2-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_{2n}^{\nu}\left(\frac{u}{a}\right) & \text{pour } 0<u<a, \\ 0 & \text{pour } u>a \end{cases}$
7.170	$t^{1-\nu} J_{\nu}(at), \quad \operatorname{Re}\nu > \frac{1}{2}$	$\begin{cases} 2^{1-\nu}a^{\nu-2}\left[\Gamma(\nu)\right]^{-1} {}_2F_1\left(1,\ 1-\nu;\ \frac{1}{2};\ \frac{u^2}{a^2}\right) & \text{pour } 0<u<a, \\ -\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu}\left[\Gamma(1+\nu)\right]^{-1}u^{-2} {}_2F_1\left(1,\ \frac{3}{2};\ \nu+1;\ \frac{a^2}{u^2}\right) & \text{pour } u>a \end{cases}$
7.171	$t^{1+\nu} J_{\nu}(at), \quad -1 < \operatorname{Re}\nu < -\frac{1}{2}$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<u<a, \\ 2^{\nu+1}\pi^{\frac{1}{2}}a^{\nu}\left[\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} u(u^2-a^2)^{-\nu-\frac{3}{2}} & \text{pour } u>a \end{cases}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.172	$t^{2\mu-1} J_{2\nu}(at), \quad -\mathrm{Re}\,\nu<\mathrm{Re}\,\mu<\frac{3}{4}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{-2\mu}\Gamma(\nu+\mu)[\Gamma(1+\nu-\mu)]^{-1}\times \\ \times {}_2F_1\left(\mu+\nu,\ \mu-\nu;\ \frac{1}{2};\ \frac{u^2}{a^2}\right) \quad \text{pour} \quad 0<u<a, \\ \left(\frac{a}{2}\right)^{2\nu}\Gamma(2\nu+2\mu)[\Gamma(2\nu+1)]^{-1}\cos[\pi(\nu+\mu)]\times \\ \times u^{-2\nu-2\mu}\,{}_2F_1\left(\nu+\mu,\ \nu+\mu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ \frac{a^2}{u^2}\right) \\ \qquad \text{pour} \quad u>a \end{cases}$
7.173	$t^{-\nu}(b^2+t^2)^{-1} J_\nu(at), \quad \mathrm{Re}\,\nu>-\frac{5}{2}$	$\frac{\pi}{2} b^{-\nu-1} e^{-bu} I_\nu(ab), \quad u>a$
7.174	$t^{2n-\nu}(b^2+t^2)^{-1} J_\nu(at), \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad \mathrm{Re}\,\nu>2n-\frac{5}{2}$	$\frac{\pi}{2}(-1)^n b^{2n-\nu-1} e^{-bu} I_\nu(ab), \quad u>a$
7.175	$t^{\nu+1}(b^2+t^2)^{-1} J_\nu(at), \quad -1<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{3}{2}$	$b^\nu \operatorname{ch}(bu) K_\nu(ab), \quad 0<u<a$
7.176	$t^{\nu+2n+1}(b^2+t^2)^{-1} J_\nu(at), \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad -1<\mathrm{Re}\,(\nu+n)<\frac{3}{2}-n$	$(-1)^n b^{\nu+2n} \operatorname{ch}(bu) K_\nu(ab), \quad 0<u<a$ $\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\nu-1}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\right]^{-1}(u^2+2u)^{-\nu-\frac{1}{2}} \quad \text{pour} \quad 0<u<2$

7.177	$t^{\nu}\sin t\, J_{\nu}(t), \quad -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{\nu-1}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\right]^{-1}\times$ $\times\left[(u^2+2u)^{-\nu-\frac{1}{2}}-(u^2-2u)^{-\nu-\frac{1}{2}}\right]$ pour $2<u<\infty$
7.178	$t^{-\nu}\cos t\, J_{\nu}(t), \quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\begin{cases}\pi^{\frac{1}{2}}2^{-\nu-\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\right]^{-1}(2u-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<u<2,\\ 0 & \text{pour } u>2\end{cases}$
7.179	$t^{-\nu}\sin t\cdot J_{\nu+1}(t), \quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\begin{cases}\pi^{\frac{1}{2}}2^{-\nu-1}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\right]^{-1}(1-u)(2u-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<u<2,\\ 0 & \text{pour } u>2\end{cases}$
7.180	$t^{-\frac{1}{2}}[J_{\nu}(at)]^2, \quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{4}$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}a^{2\nu}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\nu\right)\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\nu\right)[\Gamma(1+\nu)]^2\right\}^{-1}\times$ $\times u^{-2\nu-\frac{1}{2}}\left\{{}_2F_1\left[\frac{3}{4}+\nu, \frac{1}{4}+\nu; 1+\nu;\right.\right.$ $\left.\left.\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{4a^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}^2$
7.181	$t^{\frac{1}{2}}J_{\nu-\frac{1}{4}}(at)\,J_{-\nu-\frac{1}{4}}(at)$	$\begin{cases}\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}(4a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\left[2\nu\arccos\left(\frac{u}{2a}\right)\right] & \text{pour } 0<u<2a,\\ 0 & \text{pour } u>2a\end{cases}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.182	$t^{-\nu-\mu} J_\nu(at) J_\mu(at)$, $\operatorname{Re}(\nu+\mu)>-1$	$\begin{cases} \pi^{-\frac{1}{2}} a^{\nu+\mu-1}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+\mu\right)\right]^{-1} \times \\ \times \int_0^{\arccos\left(\frac{u}{2a}\right)} (\cos\xi)^{-\nu-\mu}\cos[(\mu-\nu)\xi] \times \\ \times \left(\cos^2\xi-\frac{u^2}{4a^2}\right)^{\nu+\mu-\frac{1}{2}} d\xi \quad \text{pour } 0<u<2a, \\ 0 \quad \text{pour } u>2a \end{cases}$
7.183	$t^{\nu-\mu-1} J_\mu(at) J_\nu(bt)$, $0<\operatorname{Re}\nu<2+\operatorname{Re}\mu$	$2^{\nu-\mu-1} b^{-\nu} a^\mu \Gamma(\nu)[\Gamma(1+\nu)]^{-1}$, $0<u<b-a$
7.184	$Y_\nu(at)$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\begin{cases} -\operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\left[\nu\arcsin\left(\frac{u}{a}\right)\right] \quad \text{pour } 0<u<a, \\ -\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \{a^{-\nu}[u-(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu \operatorname{ctg}(\pi\nu)+ \\ +a^\nu[u-(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu}\operatorname{cosec}(\pi\nu)\} \quad \text{pour } u>a \end{cases}$

7.185	$t^{\nu} Y_{\nu}(at), \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < u < a \\ -2^{\nu}\pi^{\frac{1}{2}} a^{\nu}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\right]^{-1}(u^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } u > a \end{cases}$
7.186	$t^{-\nu} Y_{\nu}(at), \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$	$\begin{cases} -\pi^{\frac{1}{2}}(2a)^{-\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\sin(\pi\nu)(a^2-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \\ \quad \text{pour } 0 < u < a, \\ -\pi^{-\frac{1}{2}}(2a)^{-\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(u^2-a^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \\ \quad \text{pour } u > a \end{cases}$
7.187	$Y_{\nu}(at)\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)+J_{\nu}(at)\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right), \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\begin{cases} 0 \quad \text{pour } 0 < u < a, \\ -\frac{1}{2} a^{-\nu}(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\{[u+(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}+ \\ +[u-(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}\} \quad \text{pour } u > a \end{cases}$
7.188	$t^{\nu}[J_{\nu}(at)\sin(at)+Y_{\nu}(at)\cos(at)], \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$	$\begin{cases} 0 \quad \text{pour } 0 < u < 2a, \\ -\pi^{\frac{1}{2}}(2a)^{\nu}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\right]^{-1}(u^2-2au)^{-\nu-\frac{1}{2}} \\ \quad \text{pour } u > 2a \end{cases}$
7.189	$t^{\nu}[Y_{\nu}(at)\cos(at)-J_{\nu}(at)\sin(at)], \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$	$-\pi^{\frac{1}{2}}(2a)^{\nu}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\right]^{-1}(u^2+2au)^{-\nu-\frac{1}{2}}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.190	$J_\nu(at)\sin\left(at-\frac{\nu\pi}{2}\right)-Y_\nu(at)\cos\left(at-\frac{\nu\pi}{2}\right)$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{a^{-\nu}}{2}(u^2+2au)^{-\frac{1}{2}}\{[u+a+(u^2+2au)^{\frac{1}{2}}]^\nu+$ $+[u+a-(u^2+2au)^{\frac{1}{2}}]^\nu\}$
7.191	$t^{\frac{1}{2}}(t^2+b^2)^{-1}\left[J_\nu(at)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\nu\pi}{2}\right)-\right.$ $\left.-Y_\nu(at)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]$, $-\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$	$b^{-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(bu)\cdot K_\nu(ab)$, $0<u<a$
7.192	$t^{-1}J_\nu(at^{-1})$	$2\{J_\nu[(2aiu)^{\frac{1}{2}}]K_\nu[(2aiu)^{\frac{1}{2}}]+J_\nu[(-2aiu)^{\frac{1}{2}}]K_\nu[(-2aiu)^{\frac{1}{2}}]\}$
7.193	$t^{2\lambda}J_{2\nu}(at^{-1})$, $-\frac{3}{4}<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\nu-\frac{1}{2}$	$\pi^{\frac{1}{2}}4^{\lambda-2\nu}\Gamma\left(\lambda-\nu+\frac{1}{2}\right)[\Gamma(1+2\nu)\Gamma(\nu-\lambda)]^{-1}\times$ $\times u^{2\nu-2\lambda-1}\,{}_0F_3\left(2\nu+1,\ \frac{1}{2}+\nu-\lambda,\ \nu-\lambda;\ \frac{a^2u^2}{16}\right)+$ $+4^{-\lambda-1}a^{1+2\lambda}\Gamma\left(\nu-\lambda-\frac{1}{2}\right)\left[\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{3}{2}\right)\right]^{-1}\times$ $\times\,{}_0F_3\left(\frac{1}{2},\ \lambda-\nu+\frac{3}{2},\ \lambda+\nu+\frac{3}{2};\ \frac{a^2u^2}{16}\right)$

7.194	$t^{-1}\sin(at^{-1})\,J_\nu(bt^{-1})$, $\operatorname{Re}\nu>-2$	$\frac{\pi}{2}J_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\left[J_\nu(du^{\frac{1}{2}})\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)-Y_\nu(du^{\frac{1}{2}})\times\right.$ $\left.\times\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]+\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)I_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\,K_\nu(du^{\frac{1}{2}})$, $c=2[(a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}]$, $d=2[(a+b)^{\frac{1}{2}}-(a-b)^{\frac{1}{2}}]$ $(a\geqslant b)$
7.195	$t^{-1}\cos(at^{-1})\,J_\nu(bt^{-1})$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$-\frac{\pi}{2}J_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\left[J_\nu(du^{\frac{1}{2}})\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)+\right.$ $\left.+Y_\nu(du^{\frac{1}{2}})\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]+$ $+\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)I_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\,K_\nu(du^{\frac{1}{2}})$, $c=2[(a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}]$, $d=2[(a+b)^{\frac{1}{2}}-(a-b)^{\frac{1}{2}}]$ $(a\geqslant b)$
7.196	$t^{-\frac{1}{2}}\cos(at^{-1})\,J_{2n-\frac{1}{2}}(at^{-1})$, $n=0,1,2,\ldots$	$(-1)^n\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}u^{-\frac{1}{2}}J_{4n-1}[2(2au)^{\frac{1}{2}}]$
7.197	$t^{-\frac{1}{2}}\sin(at^{-1})\,J_{2n+\frac{1}{2}}(at^{-1})$, $n=0,1,2,\ldots$	$(-1)^n\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}u^{-\frac{1}{2}}J_{4n+1}[2(2au)^{\frac{1}{2}}]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t) \cos(ut)\, dt$
7.198	$t^{-1} \sin(at^{-1}) J_{2n}(bt^{-1}), \quad n=0, 1, 2, \ldots$	$(-1)^n \frac{\pi}{2} J_{2n}\{2u^{\frac{1}{2}} [(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}}]\} \times$ $\times J_{2n}\{2u^{\frac{1}{2}} [(a+b)^{\frac{1}{2}} - (a-b)^{\frac{1}{2}}]\}$
7.199	$t^{-1} \cos(at^{-1}) J_{2n+1}(bt^{-1}), \quad n=0, 1, 2, \ldots$	$(-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} J_{2n+1}\{2u^{\frac{1}{2}} [(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}}]\} \times$ $\times J_{2n+1}\{2u^{\frac{1}{2}} [(a+b)^{\frac{1}{2}} - (a-b)^{\frac{1}{2}}]\}$
7.200	$t^{-1} \sin(at^{-1}) Y_\nu(bt^{-1}), \quad -2 < \mathrm{Re}\,\nu < 2$	$\frac{\pi}{2} Y_\nu(cu^{\frac{1}{2}}) \left[J_\nu(cu^{\frac{1}{2}}) \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) - \right.$ $\left. - Y_\nu(du^{\frac{1}{2}}) \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right] +$ $+ K_\nu(du^{\frac{1}{2}}) \left[I_\nu(cu^{\frac{1}{2}}) \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \right.$ $\left. + \frac{2}{\pi} K_\nu(cu^{\frac{1}{2}}) \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right],$ $c = 2[(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}}],$ $d = 2[(a+b)^{\frac{1}{2}} - (a-b)^{\frac{1}{2}}], \quad (a \geqslant b)$

7.201	$t^{-1}\cos(at^{-1})\,Y_\nu(bt^{-1}), \quad -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$-\frac{\pi}{2}Y_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\left[J_\nu(du^{\frac{1}{2}})\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)+\right.$ $\left.+Y_\nu(du^{\frac{1}{2}})\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]-$ $-K_\nu(du^{\frac{1}{2}})\left[I_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)+\right.$ $\left.+\frac{2}{\pi}K_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right],$ $c=2[(a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}],$ $d=2[(a+b)^{\frac{1}{2}}-(a-b)^{\frac{1}{2}}], \quad (a\geqslant b)$
7.202	$t^{-\frac{1}{2}}J_\nu(at^{\frac{1}{2}}), \quad \operatorname{Re}\nu>-1$	$\left(\frac{u}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{a^2}{8u}-\frac{\nu\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2}{8u}\right)$
7.203	$t^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(at^{\frac{1}{2}}), \quad -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$2^{-\nu}a^\nu u^{-\nu-1}\sin\left(\frac{a^2}{4u}-\frac{\nu\pi}{2}\right)$
7.204	$t^{\frac{\nu}{2}}e^{-at}J_\nu[2(bt)^{\frac{1}{2}}], \quad \operatorname{Re}\nu>-1$	$b^{\frac{\nu}{2}}(a^2+u^2)^{-\frac{\nu+1}{2}}e^{-\frac{ab}{a^2+u^2}}\times$ $\times\cos\left[bu(a^2+u^2)^{-1}-(\nu+1)\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)\right]$
7.205	$J_\nu(at^{\frac{1}{2}})\,J_\nu(bt^{\frac{1}{2}}), \quad \operatorname{Re}\nu>-1$	$u^{-1}J_\nu\left(\frac{ab}{2u}\right)\sin\left[\frac{a^2+b^2}{4u}-\frac{\nu\pi}{2}\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.206	$J_\nu(at)\,J_{2\nu}(bt^{\frac{1}{2}})$, $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$	$\begin{cases} (a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\left[\frac{b^2u}{4(a^2-u^2)}\right] J_\nu\left[\frac{ab^2}{4(a^2-u^2)}\right] & \text{pour } u<a, \\ (u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\left[\frac{b^2u}{4(u^2-a^2)}-\pi\nu\right] J_\nu\left[\frac{ab^2}{4(u^2-a^2)}\right] & \text{pour } u>a \end{cases}$
7.207	$J_\nu(at^{\frac{1}{2}})\,Y_{-\nu}(bt^{\frac{1}{2}}) + J_{-\nu}(bt^{\frac{1}{2}})\,Y_\nu(at^{\frac{1}{2}})$, $-1 < \mathrm{Re}\,\nu < 1$	$\frac{1}{u}\left[\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{a^2+b^2}{4u}\right) Y_\nu\left(\frac{ab}{2u}\right) - \right.$ $\left. -\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{a^2+b^2}{4u}\right) J_\nu\left(\frac{ab}{2u}\right)\right]$
7.208	$\begin{cases} [t(a-t)]^{-\frac{1}{2}} J_{2\nu}\{b[t(a-t)]^{\frac{1}{2}}\} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$	$\pi J_\nu\left\{\frac{a}{4}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+u]\right\} J_\nu\left\{\frac{a}{4}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-u]\right\} \times$ $\times \cos\left(\frac{au}{2}\right)$
7.209	$\begin{cases} (a^2-u^2)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[b(a-t)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu > -1$	$\left(\frac{b}{2}\right)^\nu u^{-\nu-1}\,U_{\nu+1}(2au,\, ba^{\frac{1}{2}})$

7.210	$(1+t)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu [a(1+t)^{\frac{1}{2}}], \quad \mathrm{Re}\,\nu > \frac{1}{2}$	$-\left(\frac{a}{2}\right)^\nu u^{-\nu-1} V_{1-\nu}(2u, a)$
7.211	$[t(1+t)]^{-\frac{1}{2}} J_{2\nu} \{b[t(1+t)]^{\frac{1}{2}}\}, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}\left[\sin\left(\frac{u}{2}-\pi\nu\right) J_\nu(x) Y_\nu(y) - \cos\left(\frac{u}{2}-\pi\nu\right) J_\nu(y) Y_\nu(x)\right],$ $x=\frac{1}{4}[u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}],$ $y=\frac{1}{4}[u-(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}], \quad (u>b)$
7.212	$(t^2+at)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu [b(t^2+at)^{\frac{1}{2}}], \quad -1 < \mathrm{Re}\,\nu < \frac{1}{2}$	$\begin{cases} \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{ab}{2}\right)^\nu \cos\left(\frac{au}{2}\right) (b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times \\ \times K_{\nu+\frac{1}{2}}\left[\frac{a}{2}(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\right] \quad \text{pour} \quad u<b, \\ -\frac{(a\pi)^{\frac{1}{2}}}{2}\left(\frac{ab}{2}\right)^\nu (u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times \\ \times\left\{\cos\left(\frac{au}{2}-\nu\pi\right) J_{\nu+\frac{1}{2}}\left[\frac{a}{2}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right] + \right. \\ \left. +\sin\left(\frac{au}{2}-\nu\pi\right) Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left[\frac{a}{2}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right\} \\ \text{pour} \quad u>b \end{cases}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.213	$(1+at^{-1})^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu[b(t^2+at)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\begin{cases} (b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{2}(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}} \times \\ \times \cos\left\{\nu \operatorname{arctg}[u(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}] - \frac{au}{2}\right\} \quad \text{pour} \quad u < b, \\ -b^\nu (u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}} [u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu} \times \\ \times \sin\left[\frac{a}{2}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{au}{2} + \frac{\pi\nu}{2}\right] \quad \text{pour} \quad u > b \end{cases}$
7.214	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} J_\nu[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$	$\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) I_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[u-(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\} \times$ $\times K_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\}, \quad u > b$
7.215	$(a^2+t^2)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$	$\begin{cases} -\left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (ab)^\nu (b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times \\ \times Y_{\nu+\frac{1}{2}} [a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] \quad \text{pour} \quad 0 < u < b, \\ -\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(\pi\nu)(ab)^\nu (u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times \end{cases}$

		$\times K_{\nu+\frac{1}{2}}[a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]$ pour $u>b$
		$\begin{cases} \left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^{-\nu}(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\times \\ \times J_{\nu-\frac{1}{2}}[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] \quad \text{pour } 0<u<b, \\ 0 \quad \text{pour } u>b \end{cases}$
7.216	$(a^2+t^2)^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$. $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	
7.217	$(a^2+t^2)^{-1}(b^2+t^2)^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu[c(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$. $\operatorname{Re}\nu>-\frac{5}{2}$	$\frac{\pi}{2}a^{-1}e^{-au}(b^2-a^2)^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu[c(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]$, $u>c$
7.218	$\begin{cases} (a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}J_\nu[b(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}] \quad \text{pour } 0<t<a, \\ 0 \quad \text{pour } t>a. \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{\pi}{2}J_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+u]\right\}J_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-u]\right\}$
7.219	$\begin{cases} (a^2-t^2)^{\frac{\nu}{2}}J_\nu[b(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}] \quad \text{pour } 0<t<a, \\ 0 \quad \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\left(\frac{a\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^{\nu}(b^2+u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\times$ $\times J_{\nu+\frac{1}{2}}[a(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.220	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ (t^2-a^2)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}], & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\begin{cases} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^\nu(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} K_{\nu+\frac{1}{2}}[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] \\ \qquad \text{pour } 0<u<b \\ -\left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^\nu(u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\times \\ \times Y_{-\nu-\frac{1}{2}}[a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}] \quad \text{pour } u>b \end{cases}$
7.221	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ (t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} J_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$-\frac{\pi}{2} J_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[u-(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\}\times$ $\times Y_{-\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\}, \quad u>b$
7.222	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<1, \\ t(t^2-1)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[a(t^2-1)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>1, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}$	$\begin{cases} 0 \qquad \text{pour } 0<u<a, \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(au)^\nu(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\times \\ \times J_{-\nu-\frac{3}{2}}[(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] \quad \text{pour } u>a \end{cases}$

7.223	$\begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 < t < c, \\ t(b^2+t^2)^{-1}(t^2-c^2)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[a(t^2-c^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour} \quad t > c, \end{cases}$ $-1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}$	$(b^2+c^2)^{\frac{\nu}{2}} \operatorname{ch}(bu)\, K_\nu[a(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}], \quad 0 < u < a$
7.224	$T_{2n}[t(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}]\, J_{2n}[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}],$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\begin{cases} (-1)^n(1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \cos[a(1-u^2)^{\frac{1}{2}}]\, T_{2n}(u) & \text{pour} \quad 0 < u < 1, \\ 0 & \text{pour} \quad u > 1 \end{cases}$
7.225	$\begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 < t < a, \\ \left(\frac{t-a}{t+a}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour} \quad t > a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\begin{cases} (b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}} \cos\{\nu \operatorname{arctg}[u(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}]\} & \text{pour} \quad 0 < u < b, \\ -(u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}} b^\nu [u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu} \times \sin\left\{\frac{\pi\nu}{2}+a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right\} & \text{pour} \quad u > b \end{cases}$
7.226	$(t^2+a^2)^{-\frac{\nu}{2}} C_{2n}^\nu[t(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}] \times$ $\times J_{\nu+2n}[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}],$ $n=0, 1, 2, \ldots; \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}$	$\begin{cases} (-1)^n \left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{-\nu}(1-u^2)^{\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)} \times C_{2n}^\nu(u)\, J_{\nu-\frac{1}{2}}[a(1-u^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour} \quad 0 < u < 1, \\ 0 & \text{pour} \quad u > 1 \end{cases}$

Suite

n°	$f_1(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.227	$\begin{cases} (1-t^2)^{\frac{\nu}{2}} C_{2n}^{\nu+\frac{1}{2}}(t)\, J_\nu[a(1-t^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1, \end{cases}$ $n=0, 1, 2, \ldots; \quad \mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$	$(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^\nu (a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times$ $\times\, C_{2n}^{\nu+\frac{1}{2}}[u(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}]\, J_{\nu+2n+\frac{1}{2}}[(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$
7.228	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}\, Y_\nu[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$	$-K_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\} \times$ $\times\left[\frac{1}{\pi} K_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[u-(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\} +\right.$ $\left.+\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) I_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[u-(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\}\right] \quad (u>b)$
7.229	$(a^2+t^2)^{\frac{\nu}{2}}\, Y_\nu[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}], \quad \mathrm{Re}\,\nu < \frac{1}{2}$	$\begin{cases} \left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (ab)^\nu (b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times \\ \times\, J_{\nu+\frac{1}{2}}[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] \quad \text{pour } 0<u<b, \\ -\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (ab)^\nu \cos(\pi\nu)\,(u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times \end{cases}$

		$\times K_{\nu+\frac{1}{2}}[a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]$ pour $u>b$
7.230	$(a^2+t^2)^{-\frac{\nu}{2}} Y_\nu[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\begin{cases} \left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^{-\nu}(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\times \\ \times Y_{\nu-\frac{1}{2}}[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] \text{ pour } 0<u<b, \\ -\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^{-\nu}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\times \\ \times K_{\nu-\frac{1}{2}}[a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}] \text{ pour } u>b \end{cases}$
7.231	$\begin{cases} (a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}} Y_\nu[b(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)[J_{\frac{\nu}{2}}(x)Y_{\frac{\nu}{2}}(y)+Y_{\frac{\nu}{2}}(x)J_{\frac{\nu}{2}}(y)]-\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\times\right.$ $\left.\times[J_{\frac{\nu}{2}}(x)J_{\frac{\nu}{2}}(y)+Y_{\frac{\nu}{2}}(x)Y_{\frac{\nu}{2}}(y)]\right\}$, $x=\frac{a}{2}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+u]$, $y=\frac{a}{2}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-u]$
7.232	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ (t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} Y_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$-\frac{\pi}{4}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)[Y_{\frac{\nu}{2}}(x)Y_{\frac{\nu}{2}}(y)+$ $+2\cos(\nu\pi)J_{\frac{\nu}{2}}(x)J_{\frac{\nu}{2}}(y)]$, $x=\frac{a}{2}[u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]$, $y=\frac{a}{2}[u-(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]$, $(u>b)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.233	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < c, \\ t(b^2+t^2)^{-1}(t^2-c^2)^{\frac{\nu}{2}+n-\frac{1}{2}} \times \\ \times Y_\nu[a(t^2-c^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t > c, \end{cases}$ $n = 0, 1, 2, \ldots;\quad -\frac{1}{2}-n < \operatorname{Re}\nu < \frac{5}{2}-2n$	$(-1)^{n+1}(b^2+c^2)^{\frac{\nu}{2}+n-\frac{1}{2}} \times$ $\times \operatorname{ch}(bu)\, K_\nu[a(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}],\quad 0 < u < a$
7.234	$J_\nu\{a[(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]\}\, J_\nu\{a[(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]\}$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\begin{cases} (4a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} J_{2\nu}[b(4a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0 < u < 2a, \\ 0 & \text{pour } u > 2a \end{cases}$
7.235	$J_\nu\{a[t+(t^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\}\, J_\nu\{a[t-(t^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\}$	$\begin{cases} (4a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} I_{2\nu}[b(4a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0 < u < 2a, \\ 0 & \text{pour } u > 2a \end{cases}$
7.236	$Y_\nu\{a[(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]\}\, Y_\nu\{a[(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]\}$, $-1 < \operatorname{Re}\nu < 1$	$\begin{cases} -(4a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} J_{2\nu}[b(4a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0 < u < 2a, \\ 4\pi^{-1}\cos(\pi\nu)(u^2-4a^2)^{-\frac{1}{2}} K_{2\nu}[b(u^2-4a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } u > 2a \end{cases}$
7.237	$J_\nu(x)\,Y_\nu(y)+J_\nu(y)\,Y_\nu(x)$, $x = a[(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t],\quad y = a[(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]$	$\begin{cases} 2(4a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} Y_{2\nu}[b(4a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0 < u < 2a, \\ 4\pi^{-1}\sin(\pi\nu)(u^2-4a^2)^{-\frac{1}{2}} K_{2\nu}[b(u^2-4a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } u > 2a \end{cases}$

7.238	$\begin{cases} J_{2\nu}\left[2a\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right] & \text{pour } 0<t<\pi, \\ 0 & \text{pour } t>\pi, \\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2} & \end{cases}$	$\pi J_{\nu-u}(a)\, J_{\nu+u}(a)$
7.239	$\begin{cases} Y_{2\nu}\left[2a\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right] & \text{pour } 0<t<\pi, \\ 0 & \text{pour } t>\pi, \\ -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2} & \end{cases}$	$\pi \operatorname{cosec}(2\pi\nu)\,[\cos(2\pi\nu)\, J_{\nu+u}(a) \times$ $\times J_{\nu-u}(a) - J_{u-\nu}(a)\, J_{-u-\nu}(a)]$
7.240	$\begin{cases} J_{\nu}(2a\sin t) & \text{pour } 0<t<\pi, \\ 0 & \text{pour } t>\pi, \\ \operatorname{Re}\nu > -1 & \end{cases}$	$\pi\cos\left(\frac{\pi u}{2}\right) J_{\frac{\nu-u}{2}}(a)\, J_{\frac{\nu+u}{2}}(a)$
7.241	$\begin{cases} Y_{\nu}(2a\sin t) & \text{pour } 0<t<\pi, \\ 0 & \text{pour } t>\pi, \\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 1 & \end{cases}$	$\pi \operatorname{cosec}(\pi\nu)\cos\left(\frac{\pi u}{2}\right)\left[J_{\frac{\nu-u}{2}}(a)\, J_{\frac{\nu+u}{2}}(a)\cos(\pi\nu) -\right.$ $\left. - J_{-\frac{\nu+u}{2}}(a)\, J_{-\frac{\nu-u}{2}}(a)\right]$
7.242	$J_{2\nu}\left[2a\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)\right], \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$I_{\nu-iu}(a)\, K_{\nu+iu}(a) + I_{\nu+iu}(a)\, K_{\nu-iu}(a)$
7.243	$Y_{2\nu}\left[2a\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)\right], \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$	$\operatorname{cosec}(2\pi\nu)\,\{\cos(2\pi\nu)\,[I_{\nu-iu}(a)\, K_{\nu+iu}(a) +$ $+ I_{\nu+iu}(a)\, K_{\nu-iu}(a)] - K_{\nu-iu}(a)\, I_{-\nu-iu}(a) -$ $- I_{-\nu+iu}(a)\, K_{\nu+iu}(a)\}$
7.244	$J_{2\nu}\left[2a\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)\right]$	$-\frac{\pi}{2}\,[J_{\nu+iu}(a)\, Y_{\nu-iu}(a) - J_{\nu-iu}(a)\, Y_{\nu+iu}(a)]$
7.245	$Y_{2\nu}\left[2a\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)\right]$	$\frac{\pi}{2}\,[J_{\nu+iu}(a)\, J_{\nu-iu}(a) - Y_{\nu+iu}(a)\, Y_{\nu-iu}(a)]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t) \cos(ut)\, dt$
7.246	$J_{\nu-t}(a)\, J_{\nu+t}(a), \quad \mathrm{Re}\, \nu > -\frac{1}{2}$	$\begin{cases} \frac{1}{2} J_{2\nu}\left[2a \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right] & \text{pour } u < \pi, \\ 0 & \text{pour } u > \pi \end{cases}$
7.247	$\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2} t\right)}{\mathrm{ch}(\pi t)} [J_{it}(a) + J_{-it}(a)]$	$\cos(a\, \mathrm{ch}\, u)\left[C\left(2a\, \mathrm{ch}^2 \frac{u}{2}\right) - S\left(2a\, \mathrm{ch}^2 \frac{u}{2}\right)\right] +$ $+ \sin(a\, \mathrm{ch}\, u)\left[C\left(2a\, \mathrm{ch}^2 \frac{u}{2}\right) + S\left(2a\, \mathrm{ch}^2 \frac{u}{2}\right)\right]$
7.248	$\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2} t\right)}{\mathrm{ch}(\pi t)} [J_{it}(a) - J_{-it}(a)]$	$-i \cos(a\, \mathrm{ch}\, u)\left[C\left(2a\, \mathrm{ch}^2 \frac{u}{2}\right) + S\left(2a\, \mathrm{ch}^2 \frac{u}{2}\right)\right] +$ $+ i \sin(a\, \mathrm{ch}\, u)\left[C\left(2a\, \mathrm{ch}^2 \frac{u}{2}\right) - S\left(2a\, \mathrm{ch}^2 \frac{u}{2}\right)\right]$
7.249	$e^{\frac{\pi}{2} t}\, H_{it}^{(2)}(a)$	$ie^{-ia\, \mathrm{ch}\, u}$
7.250	$e^{-\frac{\pi}{2} t}\, H_{it}^{(1)}(a)$	$-ie^{ia\, \mathrm{ch}\, u}$
7.251	$[J_{it}(a)]^2 + [Y_{it}(a)]^2$	$\frac{2}{\pi} K_0\left[2a\, \mathrm{sh}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
7.252	$J_{it}(a)\, Y_{-it}(b) + J_{-it}(b)\, Y_{it}(a)$	$-J_0\left[(a^2+b^2+2ab\, \mathrm{ch}\, u)^{\frac{1}{2}}\right]$
7.253	$J_{it}(a)\, J_{-it}(b) - Y_{it}(a)\, Y_{-it}(b)$	$Y_0\left[(a^2+b^2+2ab\, \mathrm{ch}\, u)^{\frac{1}{2}}\right]$
7.254	$H_{it}^{(2)}(a)\, H_{it}^{(2)}(b)\, e^{\pi t}$	$iH_0^{(2)}\left[(a^2+b^2+2ab\, \mathrm{ch}\, u)^{\frac{1}{2}}\right]$

7.255	$H_{it}^{(1)}(a)\,H_{it}^{(1)}(b)\,e^{-\pi t}$	$-iH_0^{(1)}\left[(a^2+b^2+2ab\operatorname{ch} u)^{\frac{1}{2}}\right]$
7.256	$K_\nu(at),\quad -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi}{4}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}\{a^{-\nu}[u+(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}+$ $+a^{\nu}[u+(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu}\}$
7.257	$t^{\nu}K_\nu(at),\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}(2a)^{\nu}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)(u^2+a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}$
7.258	$t^{-\mu}K_\nu(at),\quad \operatorname{Re}(\mu\pm\nu)<1$	$\frac{1}{2a}\left(\frac{a}{2}\right)^{\mu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\times$ $\times\,{}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-u^2a^{-2}\right)$
7.259	$K_\nu(at)\,I_\nu(bt),\quad a>b,\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(ab)^{-\frac{1}{2}}\,\mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2+u^2}{2ab}\right)$
7.260	$t^{\frac{1}{2}}I_{\nu-\frac{1}{4}}(at)\,K_{\nu+\frac{1}{4}}(at),\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{4}$	$a^{-2\nu}\left(\frac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}}(u^2+4a^2)^{-\frac{1}{2}}\left[(4a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-u\right]^{2\nu}$
7.261	$t^{-\frac{1}{2}}I_\nu(at)\,K_\nu(bt),\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{4}$	$e^{i\pi\nu}\left(\frac{\pi}{2u}\right)^{\nu}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\nu\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}-\nu\right)\right]^{-1}\times$ $\times\,\mathfrak{Q}^{-\nu}_{-\frac{3}{4}}\left[u^{-1}(u^2+4a^2)^{\frac{1}{2}}\right]\mathfrak{P}^{-\nu}_{-\frac{3}{4}}\left[u^{-1}(u^2+4a^2)^{\frac{1}{2}}\right]$
7.262	$K_\nu(at)\,K_\nu(bt),\quad -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{\pi^2}{4}\sec(\pi\nu)\,(ab)^{-\frac{1}{2}}\,P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2+u^2}{2ab}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.263	$t^{\nu-\mu} J_\mu(at) K_\nu(bt)$, $\operatorname{Re}\mu > -1$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\pi 2^{-\nu-\mu-\frac{3}{2}} \Gamma(1+2\nu)[\Gamma(1+\mu)]^{-1} \times$ $\times a^{\mu-\nu-\frac{3}{2}} u^{\frac{1}{2}} (\operatorname{ch}\varphi - \cos\delta) \times$ $\times P^{-\nu}_{\nu-\mu-\frac{1}{2}} (\cos\delta)(\operatorname{sh}\varphi)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}[(\nu-\mu)\varphi]$, $u+ib = ia \operatorname{ctg}\left(\frac{\delta}{2}+i\frac{\varphi}{2}\right)$
7.264	$t^{\nu-\mu} I_\mu(at) K_\nu(bt)$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, $a > b$	$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \xi^{\nu-\mu} J_\mu(a\xi) J_\nu(b\xi) e^{-u\xi}\, d\xi$
7.265	$t^{-2\nu} I_\nu(at) K_\nu(at)$, $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$	$\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-2\nu-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) [\Gamma(1+\nu)]^{-1} \times$ $\times u^{2\nu-1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\nu; 1+\nu; -4a^2u^{-2}\right)$
7.266	$t^{2\nu+1} I_\nu(at) K_\nu(at)$, $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < 0$	$-\frac{1}{2a}\sin(\pi\nu)\, u^{-2\nu-1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\nu; -\nu; -\frac{u^2}{4a^2}\right)$
7.267	$t^{\frac{1}{2}} [K_\nu(at)]^2$, $-\frac{3}{4} < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{4}$	$e^{i2\pi\nu}\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}+\nu\right)\left[\Gamma\left(-\frac{1}{4}-\nu\right)\right]^{-1} \times$

		$\times (u^2+4a^2)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{D}^{-\nu}_{-\frac{1}{4}} [u^{-1} (u^2+4a^2)^{\frac{1}{2}}] \times$ $\times \mathfrak{D}^{-\nu}_{-\frac{5}{4}} [u^{-1} (u^2+4a^2)^{\frac{1}{2}}]$
7.268	$t^{-\frac{1}{2}} [K_\nu (at)]^2, \quad -\frac{1}{4} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{4}$	$e^{i2\pi\nu} \Gamma \left(\frac{1}{4}+\nu\right) \left[\Gamma \left(\frac{1}{4}-\nu\right)\right]^{-1} \times$ $\times \left(\frac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}} \{\mathfrak{D}^{-\nu}_{-\frac{3}{4}} [u^{-1} (u^2+4a^2)^{\frac{1}{2}}]\}^2$
7.269	$t^{\frac{1}{2}} K_\nu (at) K_{\nu+1} (at), \quad -\frac{5}{4} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{4}$	$-e^{2i\pi\nu} \left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{5}{4}+\nu\right) \times$ $\times \left[\Gamma \left(-\frac{3}{4}-\nu\right)\right]^{-1} (u^2+4a^2)^{-\frac{1}{2}} \times$ $\times Q^{-\nu}_{-\frac{3}{4}} [u^{-1} (u^2+4a^2)^{\frac{1}{2}}] Q^{-\nu-1}_{-\frac{3}{4}} [u^{-1} (u^2+4a^2)^{\frac{1}{2}}]$
7.270	$t^{\lambda-1} K_\nu (t) K_\mu (t), \quad \operatorname{Re} \lambda > \lvert \operatorname{Re} \mu \rvert + \lvert \operatorname{Re} \nu \rvert$	$2^{\lambda-3} [\Gamma (\lambda)]^{-1} \Gamma \left(\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma \left(\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\right) \times$ $\times \Gamma \left(\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}\right) \Gamma \left(\frac{\lambda-\mu-\nu}{2}\right) \times$ $\times {}_4F_3 \left(\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}, \frac{\lambda+\mu-\nu}{2}, \frac{\lambda-\mu+\nu}{2},\right.$ $\left.\frac{\lambda-\mu-\nu}{2}; \frac{1}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}; -\frac{1}{4} u^2\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int\limits_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.271	$t^{-2\nu}e^{-t^2}I_\nu(t^2)$, $\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$2^{-\frac{\nu}{2}}u^{\nu-1}e^{-\frac{u^2}{16}}W_{-\frac{3\nu}{2},\,\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{8}\right)$
7.272	$t^{2\nu}e^{-t^2}I_\nu(t^2)$, $\quad -\frac{1}{4}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{2^{-\nu-\frac{3}{2}}}{\pi}\Gamma(-\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\nu\right)e^{-\frac{u^2}{8}}\times$ $\times\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\nu;\ 1+\nu;\ \frac{u^2}{8}\right)+2^{2\nu-\frac{3}{2}}u^{-2\nu}e^{-\frac{u^2}{8}}\Gamma(\nu)\times$ $\times\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\right]^{-1}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-2\nu;\ 1-\nu;\ \frac{u^2}{8}\right)$
7.273	$t^{2\nu+1}e^{-at^2}I_\nu(at^2)$, $\quad -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<0$	$2^{2\nu-\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)[\Gamma(-\nu)]^{-1}\times$ $\times\,u^{-2\nu-1}e^{-\frac{u^2}{4a}}{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}-2\nu;\ -\nu;\ \frac{u^2}{8a}\right)$
7.274	$t^{2\nu}e^{-at^2}K_\nu(at^2)$, $\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{2}(2a)^{-\nu-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\Gamma(1+\nu)}e^{-\frac{u^2}{8a}}\times$ $\times\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\nu;\ 1+\nu;\ \frac{u^2}{8a}\right)$

7.275	$t^{-2\nu} e^{t^2} K_\nu(t^2), \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$	$\pi 2^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-2\nu\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\right]^{-1} \times$ $\times u^{\nu-1} e^{\frac{u^2}{16}} W_{\frac{3\nu}{2},\, -\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{8}\right)$
7.276	$t^{2\lambda-1} e^{-t^2} K_\nu(t^2), \quad \operatorname{Re}\lambda > \lvert\operatorname{Re}\nu\rvert$	$\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\lambda-1} \Gamma(\lambda+\nu)\Gamma(\lambda-\nu)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\right]^{-1} \times$ $\times {}_2F_2\left(\lambda+\nu,\ \lambda-\nu;\ \frac{1}{2},\ \lambda+\frac{1}{2};\ -\frac{u^2}{8}\right)$
7.277	$t^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{8}-\nu}(a^2t^2) K_{\frac{1}{8}-\nu}(a^2t^2), \quad \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{8}$	$\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^{-1} \Gamma\left(\frac{3}{8}-\nu\right) \frac{1}{u}\left(\frac{2\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \times$ $\times W_{\nu,\, -\frac{1}{8}}\left(\frac{u^2}{8a^2}\right) M_{-\nu,\, -\frac{1}{8}}\left(\frac{u^2}{8a^2}\right)$
7.278	$t^{-1} K_\nu(at^{-1}), \quad -1 < \operatorname{Re}\nu < 1$	$-\pi K_\nu[(2au)^{\frac{1}{2}}]\left\{J_\nu[(2au)^{\frac{1}{2}}]\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)+\right.$ $\left.+Y_\nu[(2au)^{\frac{1}{2}}]\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right\}$
7.279	$t^{-\frac{1}{2}} K_\nu(at^{\frac{1}{2}}), \quad -1 < \operatorname{Re}\nu < 1$	$-\frac{\pi}{4}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left[J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2}{8u}\right)\sin\left(\frac{\pi\nu}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{a^2}{8u}\right)+\right.$ $\left.+Y_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2}{8u}\right)\cos\left(\frac{\pi\nu}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{a^2}{8u}\right)\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.280	$J_\nu(at^{\frac{1}{2}})\,K_\nu(at^{\frac{1}{2}}),\quad \operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{\pi}{2u}\operatorname{cosec}(\pi\nu)\left[\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)I_\nu\left(\frac{a^2}{2u}\right)+\frac{i}{2}J_\nu\left(i\frac{a^2}{2u}\right)-\frac{i}{2}J_\nu\left(-i\frac{a^2}{2u}\right)\right]$
7.281	$\left[J_\nu(at^{\frac{1}{2}})\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)+Y_\nu(at^{\frac{1}{2}})\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]K_\nu(at^{\frac{1}{2}}),$ $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$-\frac{1}{2u}K_\nu\left(\frac{a^2}{2u}\right)$
7.282	$t^{-\frac{1}{2}}J_\nu(at^{\frac{1}{2}})\,K_\nu(at^{\frac{1}{2}}),\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{a^2}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}\right)[\Gamma(1+\nu)]^{-1}\times\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{4},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2}{2u}\right)M_{-\frac{1}{4},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2}{2u}\right)$
7.283	$t^{-\frac{1}{2}}K_\nu(at^{\frac{1}{2}})\left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)J_\nu(at^{\frac{1}{2}})+\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)Y_\nu(at^{\frac{1}{2}})\right],$ $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}W_{-\frac{1}{4},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2}{2u}\right)W_{\frac{1}{4},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2}{2u}\right)$

7.284	$[I_\nu(at^{\frac{1}{2}})+I_{-\nu}(at^{\frac{1}{2}})]\,K_\nu(at^{\frac{1}{2}}),$ $\quad -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi}{2u}\left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}-\frac{a^2}{2u}\right)J_\nu\left(\frac{a^2}{2u}\right)-\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}-\frac{a^2}{2u}\right)Y_\nu\left(\frac{a^2}{2u}\right)\right]$
7.285	$t^{\frac{\nu}{2}}\{e^{i\pi\frac{\nu}{4}}K_\nu[a(it)^{\frac{1}{2}}]+$ $+e^{-i\pi\frac{\nu}{4}}K_\nu[a(-it)^{\frac{1}{2}}]\},\quad \operatorname{Re}\nu>-1$	$\pi 2^{-\nu-1}a^{2\nu}u^{-\nu-1}e^{-\frac{a^2}{2u}}$
7.286	$t^{-\frac{1}{2}}K_\nu[a(it)^{\frac{1}{2}}]\,K_\nu[a(-it)^{\frac{1}{2}}],$ $\quad -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2a^2}\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\times$ $\times W_{\frac{1}{4},\frac{\nu}{2}}\left(i\frac{a^2}{2u}\right)W_{\frac{1}{4},\frac{\nu}{2}}\left(-i\frac{a^2}{2u}\right)$
7.287	$K_\nu[a(it)^{\frac{1}{2}}]\,K_\nu[a(-it)^{\frac{1}{2}}],$ $\quad -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi}{4u}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)S_{0,\nu}\left(\frac{a^2}{2u}\right)$
7.288	$t^{-\frac{\nu}{2}}\left[K_\nu(at^{\frac{1}{2}})\cos(\pi\nu)-\frac{\pi}{2}Y_\nu(at^{\frac{1}{2}})\right],$ $\quad -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{-\nu}u^{\nu-1}\cos\left(\frac{a^2}{4u}-\frac{\nu\pi}{2}\right)$
7.289	$t^{-\frac{\nu}{2}}\left[K_\nu(at^{\frac{1}{2}})\sin(\pi\nu)-\frac{\pi}{2}J_\nu(at^{\frac{1}{2}})\right],$ $\quad -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$-\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{-\nu}u^{\nu-1}\sin\left(\frac{a^2}{4u}-\frac{\nu\pi}{2}\right)$
7.290	$(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}K_\nu[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$	$\frac{1}{2}K_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-u]\right\}\times$ $\times K_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}}+u]\right\}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.291	$(t^2+a^2)^{\mp\frac{\nu}{2}} K_\nu[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$	$\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} (ab)^{\mp\nu} (b^2+u^2)^{\pm\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} \times$ $\times K_{\pm\nu-\frac{1}{2}} [a(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$
7.292	$[t(1+t)]^{-\frac{1}{2}} K_\nu\{b[t(1+t)]^{\frac{1}{2}}\}$, $-1 < \operatorname{Re}\nu < 1$	$\frac{\pi^2}{8}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{u}{2}\right)[J_{\frac{\nu}{2}}(x)J_{\frac{\nu}{2}}(y)+\right.$ $+Y_{\frac{\nu}{2}}(x)Y_{\frac{\nu}{2}}(y)]+\sin\left(\frac{u}{2}\right)\times$ $\left.\times[J_{\frac{\nu}{2}}(y)Y_{\frac{\nu}{2}}(x)-J_{\frac{\nu}{2}}(x)Y_{\frac{\nu}{2}}(y)]\right\}$, $x=\frac{1}{4}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+u]$, $y=\frac{1}{4}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-u]$
7.293	$I_\nu\{a[(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]\} K_\nu\{a[(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]\}$	$(4a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{\pi}{2}\sec(\pi\nu)\times\right.$ $\times I_{2\nu}[b(u^2+4a^2)^{\frac{1}{2}}]+\frac{i\pi}{2}\operatorname{cosec}(2\pi\nu)\times$

		$\times \left(\mathbf{J}_{2\nu}\left[ib\left(u^2+4a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]-\mathbf{J}_{-2\nu}\left[ib\left(u^2+4a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)\Big\}$
7.294	$K_\nu\left\{a\left[t+\left(t^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\} K_\nu\left\{a\left[t-\left(t^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$	$\pi\left(4a^2+u^2\right)^{-\frac{1}{2}} S_{0,2\nu}\left[b\left(4a^2+u^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$
7.295	$K_\nu\left\{a\left[\left(b^2+t^2\right)^{\frac{1}{2}}-t\right]\right\} K_\nu\left\{a\left[\left(b^2+t^2\right)^{\frac{1}{2}}+t\right]\right\}$	$\pi\left(4a^2+u^2\right)^{-\frac{1}{2}} K_{2\nu}\left[b\left(u^2+4a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$
7.296	$\begin{cases}\left(a^2-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} I_\nu\left[b\left(a^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } 0<t<a,\\ 0 & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{\pi}{2} J_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}\left[u+\left(u^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\} J_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}\left[u-\left(u^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$
7.297	$\begin{cases}(a-t)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left[b(a-t)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } 0<t<a,\\ 0 & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{1}{u}\left(\frac{b}{2u}\right)^\nu U_{\nu+1}\left(2au,\ iba^{\frac{1}{2}}\right)$
7.298	$\begin{cases}\left(a^2-t^2\right)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left[b\left(a^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } 0<t<a,\\ 0 & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\begin{cases}\left(\frac{a\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^\nu\left(b^2-u^2\right)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\times \\ \times I_{\nu+\frac{1}{2}}\left[a\left(b^2-u^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad \text{pour } 0<u<b,\\ \left(\frac{a\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^\nu\left(u^2-b^2\right)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\times \\ \times J_{\nu+\frac{1}{2}}\left[a\left(u^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad \text{pour } u>b\end{cases}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.299	$\begin{cases}(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}} K_\nu[b(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<t<a,\\ 0 & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$-\frac{\pi^2}{8}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)[J_{\frac{\nu}{2}}(x)Y_{-\frac{\nu}{2}}(y)+Y_{\frac{\nu}{2}}(x)J_{-\frac{\nu}{2}}(y)]$, $x=\frac{a}{2}[u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]$, $y=\frac{a}{2}[u-(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]$, $u>b$
7.300	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<a,\\ (t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} K_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi^2}{8}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)[J_{\frac{\nu}{2}}(x)J_{\frac{\nu}{2}}(y)+Y_{\frac{\nu}{2}}(x)Y_{\frac{\nu}{2}}(y)]$, $x=\frac{a}{2}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+u]$, $y=\frac{a}{2}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-u]$
7.301	$\begin{cases}(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}} J_\nu[b(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<t<a,\\ -\frac{2}{\pi}\cos(\pi\nu)(t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} K_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>a\end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$-\frac{\pi}{2}Y_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+u]\right\}Y_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-u]\right\}$
7.302	$\begin{cases}(a^2-t^2)^{\frac{\nu}{2}} Y_\nu[b(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<t<a,\\ -\frac{2}{\pi}(t^2-a^2)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>a\end{cases}$	$\left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^\nu(b^2+u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}Y_{\nu+\frac{1}{2}}[a(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$

7.303	$\begin{cases} I_{2\nu}\left[2a\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right] & \text{pour} \quad 0<t<\pi, \\ 0 & \text{pour} \quad t>\pi, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\pi I_{\nu-u}(a)\, I_{\nu+u}(a)$
7.304	$\begin{cases} K_{2\nu}\left[2a\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right] & \text{pour} \quad 0<t<\pi, \\ 0 & \text{pour} \quad t>\pi, \end{cases}$ $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\pi \operatorname{cosec}(2\pi\nu)\,\{I_{u-\nu}(a)\, K_{u+\nu}(a) \sin[\pi(u+\nu)] -$ $- I_{u+\nu}(a)\, K_{u-\nu}(a) \sin[\pi(u-\nu)]\}$
7.305	$\begin{cases} I_{2\nu}(2a\sin t) & \text{pour} \quad 0<t<\pi, \\ 0 & \text{pour} \quad t>\pi, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\pi\cos\left(\frac{\pi u}{2}\right) I_{\nu-\frac{u}{2}}(a)\, I_{\nu+\frac{u}{2}}(a)$
7.306	$\begin{cases} K_{2\nu}(2a\sin t) & \text{pour} \quad 0<t<\pi, \\ 0 & \text{pour} \quad t>\pi, \end{cases}$ $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{\pi^2}{2}\operatorname{cosec}(2\pi\nu)\cos\left(\frac{\pi u}{2}\right)[I_{-\nu-\frac{u}{2}}(a)\, I_{-\nu+\frac{u}{2}}(a) -$ $- I_{\nu-\frac{u}{2}}(a)\, I_{\nu+\frac{u}{2}}(a)]$
7.307	$\begin{cases} e^{-a^2\cos^2 t}\, I_{\frac{\nu}{2}}(a^2\cos^2 t) & \text{pour} \quad 0<t<\frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{pour} \quad t>\frac{\pi}{2}, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$2^{-\frac{\nu}{2}-1}\pi^{\frac{1}{2}} a^{\nu}\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{2+\nu-u}{2}\right)\times\right.$ $\left.\times\Gamma\left(\frac{2+\nu+u}{2}\right)\right]^{-1} {}_3F_3\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}, \frac{2+\nu}{2};\right.$ $\left.\frac{2+\nu-u}{2}, \frac{2+\nu+u}{2}, 1+\nu; \quad -2a^2\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t) \cos(ut)\, dt$
7.308	$K_{2\nu}\left[2a \operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)\right], \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$	$\frac{\pi^2}{4}\{J_{iu-\nu}(a) J_{iu+\nu}(a) + Y_{iu-\nu}(a) Y_{iu+\nu}(a) + \operatorname{tg}(\nu\pi)[J_{iu+\nu}(a) Y_{iu-\nu}(a) - J_{iu-\nu}(a) Y_{iu+\nu}(a)]\}$
7.309	$K_{2\nu}\left[2a \operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)\right]$	$K_{\nu+iu}(a) K_{\nu-iu}(a)$
7.310	$I_{\nu+t}(a) I_{\nu-t}(a)$	$\begin{cases} \frac{1}{2} I_{2\nu}\left[2a \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right] & \text{pour } 0 < u < \pi, \\ 0 & \text{pour } u > \pi \end{cases}$
7.311	$K_{it}(a)$	$\frac{\pi}{2} e^{-a \operatorname{ch} u}$
7.312	$\operatorname{ch}(bt) K_{it}(a), \quad b \leqslant \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \cos(a \sin b \operatorname{sh} u)\, e^{-a \cos b \operatorname{ch} u}$
7.313	$\operatorname{sch}(\pi t) K_{it}(a)$	$\frac{\pi}{2} e^{a \operatorname{ch} u} \operatorname{erfc}\left[(2a)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
7.314	$\frac{\operatorname{sh}(\pi t)}{\operatorname{sh}(bt)} K_{it}(a), \quad b \geqslant \frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n I_{\frac{n\pi}{b}}(a) \operatorname{ch}\left(n\pi \frac{u}{b}\right)$
7.315	$[J_{it}(a) + J_{-it}(a)] K_{it}(a)$	$\frac{\pi}{2} J_0[a(2\operatorname{sh} u)^{\frac{1}{2}}]$
7.316	$[Y_{it}(a) + Y_{-it}(a)] K_{it}(a)$	$\frac{\pi}{2} Y_0[a(2\operatorname{sh} u)^{\frac{1}{2}}] - K_0[a(2\operatorname{sh} u)^{\frac{1}{2}}]$

7.317	$[I_{it}(a)+I_{-it}(a)]\,K_{it}(a)$	$\frac{\pi}{2} J_0\left[2a\,\mathrm{sh}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
7.318	$[K_{it}(a)]^2$	$\frac{\pi}{2} K_0\left[2a\,\mathrm{ch}\left[\frac{u}{2}\right)\right]$
7.319	$\mathrm{ch}(\pi t)\,[K_{it}(a)]^2$	$-\frac{\pi^2}{4} Y_0\left[2a\,\mathrm{sh}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
7.320	$K_{it}(a)\,K_{it}(b)$	$\frac{\pi}{2} K_0\left[(a^2+b^2+2ab\,\mathrm{ch}\,u)^{\frac{1}{2}}\right]$
7.321	$K_{\nu+it}(a)\,K_{\nu-it}(a)$	$\frac{\pi}{2} K_{2\nu}\left[2a\,\mathrm{ch}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
7.322	$t^{-\nu-1}\,s_{\nu,\,\nu+2}(t)$, $\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{3}{2}$	$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} u(1-u^2)^{\nu+\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<u<1, \\ 0 & \text{pour } u>1 \end{cases}$
7.323	$t^{-\mu-1}\,s_{\mu,\,\nu}(t)$, $\mathrm{Re}\,\mu>-\frac{3}{2}$	$\begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{\mu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\times \\ \times(1-u^2)^{\frac{1}{2}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} P_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\mu-\frac{1}{2}}(u) & \text{pour } 0<u<1, \\ 0 & \text{pour } u>1 \end{cases}$
7.324	$t^{\nu} S_{\mu,\,\nu}(at)$, $\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$, $-2<\mathrm{Re}(\mu+\nu)<1$	$\pi^{\frac{1}{2}}(2\nu+1)^{-1}\,2^{\nu+\mu}a^{\nu}\,\Gamma\left(1+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu,\ \frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2};\ \frac{3}{2}+\nu;\ 1-\frac{a^2}{u^2}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t) \cos(ut)\, dt$
7.325	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} S_{0,\nu}[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$	$\frac{1}{2} K_{\frac{\nu}{2}} \left\{ \frac{a}{2} [u+(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}}] \right\} K_{\frac{\nu}{2}} \left\{ \frac{a}{2} [u-(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}] \right\}$
7.326	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \times \right.$ $\left. \times I_\nu [b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}] + i s_{0,\nu} [ib(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}] \right\}$	$\frac{\pi}{2} I_{\frac{\nu}{2}} \left\{ \frac{a}{2} [(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}} - u] \right\} K_{\frac{\nu}{2}} \left\{ \frac{a}{2} (b^2+u^2)^{\frac{1}{2}} + u] \right\}$
7.327	$S_{0,it}(a)$	$e^{-a \operatorname{sh} u}$
7.328	$t \operatorname{csch}\left(\frac{\pi t}{2}\right) S_{-1,it}(a)$	$-\cos(a \operatorname{ch} u) \operatorname{Ci}(a \operatorname{ch} u) - \sin(a \operatorname{ch} u) \operatorname{si}(a \operatorname{ch} u)$
7.329	$J_\nu(at) + J_{-\nu}(at)$	$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} \cos\left[\nu \arccos\left(\frac{u}{a}\right)\right] & \text{pour } 0 < u < a, \\ 0 & \text{pour } u > a \end{cases}$
7.330	$\frac{\pi}{2}(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \times \right.$ $\times I_\nu [b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}] + i \operatorname{cosec}[\pi\nu] \times$ $\left. \times [J_\nu [ib(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}] - J_{-\nu}[ib(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]] \right\}$	$\frac{\pi}{2} I_{\frac{\nu}{2}} \left\{ \frac{a}{2} [(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}} - u] \right\} K_{\frac{\nu}{2}} \left\{ \frac{a}{2} [(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}} + u] \right\}$

7.331	$\mathbf{J}_\nu(2a \operatorname{ch} t)$	$\frac{\pi}{2} i \operatorname{csch}(\pi u)\Big[J_{\frac{\nu+iu}{2}}(a) J_{-\frac{\nu-iu}{2}}(a) \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+i\frac{\pi}{2}u\right)-$ $-J_{\frac{\nu-iu}{2}}(a) J_{-\frac{\nu+iu}{2}}(a) \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}-i\frac{\pi}{2}u\right)\Big]$
7.332	$\mathbf{E}_\nu(2a \operatorname{ch} t)$	$\frac{i\pi}{2} \operatorname{csch}(\pi u)\Big[J_{-\frac{\nu-iu}{2}}(a) J_{\frac{\nu+iu}{2}}(a) \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{i\pi}{2}u\right)-$ $-J_{-\frac{\nu+iu}{2}}(a) J_{\frac{\nu-iu}{2}}(a) \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}-\frac{i\pi}{2}u\right)\Big]$
7.333	$\mathbf{J}_\nu(a \operatorname{sh} t)+\mathbf{J}_{-\nu}(a \operatorname{sh} t)$	$-\frac{i\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\operatorname{csch}\left(\frac{\pi u}{2}\right)\Big[I_{-\frac{\nu+iu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\times$ $\times I_{\frac{\nu-iu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)-I_{-\frac{\nu-iu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) I_{\frac{\nu+iu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\Big]$
7.334	$\mathbf{E}_\nu(a \operatorname{sh} t)-\mathbf{E}_{-\nu}(a \operatorname{sh} t)$	$\frac{i\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\operatorname{csch}\left(\frac{\pi u}{2}\right)\Big[I_{-\frac{\nu-iu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) I_{\frac{\nu+iu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)-$ $-I_{-\frac{\nu+iu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) I_{\frac{\nu-iu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\Big]$
7.335	$t^{-\nu-1}\,\mathbf{H}_\nu(t),\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}$	$\begin{cases}(2\pi)^{\frac{1}{2}}(1-u^2)^{\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} P_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\frac{1}{2}}(u) & \text{pour } 0<u<1,\\ 0 & \text{pour } u>1\end{cases}$
7.336	$t^{-\nu}[\mathbf{H}_\nu(at)-Y_\nu(at)]$	$2^{-\nu}\pi^{-\frac{1}{2}}a^{\nu-1}\left[\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\right]^{-1}\times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\nu,\ 1;\ \frac{3}{2}-\nu;\ 1-\frac{u^2}{a^2}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.337	$t^{\nu}[\mathbf{H}_{\nu}(at)-Y_{\nu}(at)]$, $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{2^{\nu}}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\nu\right)^{-1}\cos(\pi\nu)\,a^{\nu-1}\,\Gamma(1+\nu)\times$ $\times u^{-2\nu}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\,1;\,\frac{3}{2}+\nu;\,1-\frac{u^2}{a^2}\right)$
7.338	$t^{-\nu}[I_{\nu}(at)-\mathbf{L}_{\nu}(at)]$	$\pi^{-\frac{1}{2}}2^{-\nu}a^{\nu+1}\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\right]^{-1}\frac{1}{u}\,{}_2F_1\left(1,\,1;\,\frac{3}{2}+\nu;\,\frac{a^2}{u^2}\right)$
7.339	$t^{-\nu}[I_{-\nu}(at)-\mathbf{L}_{\nu}(at)]$, $\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$2^{-\nu}\pi^{-\frac{1}{2}}a^{\nu-1}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\right]^{-1}(a^2+u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\times$ $\times\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^{-1}a^2u^{-2\nu-1}\times\right.$ $\left.\times\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu,\,\frac{1}{2}+\nu;\,\frac{3}{2}+\nu;\,-\frac{a^2}{u^2}\right)+\pi a^{1-2\nu}\operatorname{tg}(\pi\nu)\right\}$
7.340	$t^{\nu+1}[I_{\nu}(at)-\mathbf{L}_{\nu}(at)]$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$2^{\nu+1}a^{\nu-1}[\Gamma(-\nu)]^{-1}u^{-2\nu-1}\,{}_2F_1\left(1,\,\frac{1}{2};\,-\nu;\,-\frac{u^2}{a^2}\right)$
7.341	$t^{-\nu-1}[I_{-\nu}(at)-\mathbf{L}_{\nu}(at)]$, $\operatorname{Re}\nu<0$	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{-\nu-1}\,\Gamma(-\nu)\left[\Gamma(1-\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\right]^{-1}\times$ $\times a^{-\nu}(a^2+u^2)^{\nu}\,{}_2F_1\left(-\nu,\,\frac{1}{2};\,1-\nu;\,\frac{a^2}{a^2+u^2}\right)$

§ 12. Fonctions hypergéométriques dégénérées

7.342	$t^{-1} \operatorname{erf}(at)$	$-\frac{1}{2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{u^2}{4a^2}\right)$
7.343	$te^{-a^2t^2} \operatorname{erf}(iat)$	$\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{2a} e^{-\frac{u^2}{4a^2}} \overline{\operatorname{Ei}}\left(\frac{u^2}{4a^2}\right)$
7.344	$t^{\nu-1} \operatorname{erfc}(at)$, $\operatorname{Re}\nu > 0$	$\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{a^{\nu}\nu} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right) {}_2F_2\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}, 1+\frac{\nu}{2}; -\frac{u^2}{4a^2}\right)$
7.345	$e^{a^2t^2} \operatorname{erfc}(at)$	$-\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{2a} e^{-\frac{u^2}{4a^2}} \operatorname{Ei}\left(-\frac{u^2}{4a^2}\right)$
7.346	$\operatorname{erfc}[(at)^{\frac{1}{2}}]$	$\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}} [(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+a]^{-\frac{1}{2}}$
7.347	$e^{at} \operatorname{erfc}[(at)^{\frac{1}{2}}]$	$\left(\frac{2u}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} [a+u+(2au)^{\frac{1}{2}}]^{-1}$
7.348	$t^{-1} \operatorname{erfc}(at^{-\frac{1}{2}})$	$\operatorname{Ei}[-a(2iu)^{\frac{1}{2}}] - \operatorname{Ei}[-a(-2iu)^{\frac{1}{2}}]$
7.349	$\operatorname{erfc}(a \operatorname{ch} t)$	$\frac{1}{2a} e^{-\frac{a^2}{2}} W_{-\frac{1}{2}, i\frac{u}{a}}(a^2)$
7.350	$e^{a \operatorname{ch}^2 t} \operatorname{erfc}(a \operatorname{ch} t)$	$\frac{1}{2} \operatorname{sch}\left(\frac{\pi u}{2}\right) e^{\frac{a^2}{2}} K_{i\frac{u}{2}}\left(\frac{a^2}{2}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.351	$e^{-a^2\operatorname{ch}^2 t}\operatorname{erf}(ia\operatorname{ch} t)$	$\frac{i\pi}{4}e^{-\frac{a^2}{2}}\operatorname{sch}\left(\frac{\pi u}{2}\right)\left[I_{iu}\left(\frac{a^2}{2}\right)+I_{-iu}\left(\frac{a^2}{2}\right)\right]$
7.352	$e^{-\frac{t^2}{4}}D_{2n}(t),\quad n=0,1,2,\ldots$	$(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}u^{2n}e^{-\frac{u^2}{2}}$
7.353	$e^{\frac{a^2t^2}{4}}D_\nu(at),\quad \operatorname{Re}\nu<0$	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\nu}\left[\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}a^{\frac{1+\nu}{2}}u^{-\frac{\nu+3}{2}}e^{\frac{u^2}{4a^2}}\times$ $\times W_{\frac{\nu-1}{4},\frac{\nu+1}{4}}\left(\frac{u^2}{2a^2}\right)$
7.354	$e^{-\frac{a^2t^2}{4}}D_\nu(at)$	$2^{\frac{\nu-1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\frac{1}{a}\,{}_1F_1\left(1;1-\frac{\nu}{2};-\frac{u^2}{2a^2}\right)$
7.355	$t^\mu e^{-\frac{t^2}{4}}D_\nu(t),\quad \operatorname{Re}\mu>-1$	$2^{\frac{\nu-\mu-1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1+\mu)\left[\Gamma\left(1+\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\times$ $\times{}_2F_2\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2},1+\frac{\mu}{2};\frac{1}{2},1+\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2};-\frac{u^2}{2}\right)$
7.356	$D_{2\nu-\frac{1}{2}}[(2t)^{\frac{1}{2}}]\{D_{-2\nu-\frac{1}{2}}[(2t)^{\frac{1}{2}}]+$ $+D_{-2\nu-\frac{1}{2}}[-(2t)^{\frac{1}{2}}]\}$	$\pi^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\nu\pi\right)u^{-2\nu-\frac{1}{2}}(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\times$ $\times[1+(1+u^2)^{\frac{1}{2}}]^{2\nu}$

7.357	$e^{-\frac{t^2}{2}}\left[D_{2\nu-\frac{1}{2}}(t)+D_{2\nu-\frac{1}{2}}(-t)\right]$	$2^{\frac{1}{4}-2\nu}\pi^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\nu\pi\right)u^{2\nu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u^2}{4}}$
7.358	$t^{-\nu}e^{-\frac{a^2}{4t}}D_{2\nu-1}\left(at^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}2^{\nu}u^{\nu-1}e^{-a\sqrt{u}}\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}-a\sqrt{u}\right)$
7.359	$t^{-\nu}e^{\frac{a^2t}{4}}D_{2\nu-1}\left(at^{\frac{1}{2}}\right),\quad \operatorname{Re}\nu<1$	$\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left[u+(a+\sqrt{u})^2\right]^{\nu-\frac{1}{2}}\times$ $\times\cos\left[(2\nu-1)\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{u}}{a+\sqrt{u}}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$
7.360	$t^{-\nu-1}e^{\frac{a^2t}{4}}D_{2\nu-1}\left(at^{\frac{1}{2}}\right),\quad \operatorname{Re}\nu<0$	$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\nu^{-1}\left[u+(a+\sqrt{u})^2\right]^{\nu}\cos\left[2\nu\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{u}}{a+\sqrt{u}}\right)\right]$
7.361	$e^{(a\operatorname{sh}t)^2}D_{\nu}(2a\operatorname{ch}t),\quad \operatorname{Re}\nu<0$	$2^{-\frac{\nu+5}{2}}a^{-1}\left[\Gamma(-\nu)\right]^{-1}\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}+i\frac{u}{2}\right)\times$ $\times\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}-i\frac{u}{2}\right)W_{\frac{\nu+1}{2},\frac{iu}{2}}(2a^2)$
7.362	$e^{-(a\operatorname{sh}t)^2}D_{\nu}(2a\operatorname{ch}t)$	$2^{\frac{\nu-3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}a^{-1}W_{\frac{\nu}{2},\frac{iu}{2}}(2a^2)$
7.363	$t^{2\nu}W_{k,\nu}(at)M_{-k,\nu}(at),$ $\operatorname{Re}\nu>\frac{1}{2},\quad \operatorname{Re}(\nu+k)<0$	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{2\nu+2k}a^{2k}\Gamma(1+2\nu)\left[\Gamma(1-\nu-k)\right]^{-1}u^{-2\nu-2k-1}\times$ $\times{}_3F_2\left(\frac{1}{2}-k,\ 1-k,\ \frac{1}{2}-k+\nu;\ 1-2k,\ -\nu-k;\ -\frac{u^2}{a^2}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int\limits_0^\infty f(t) \cos(ut)\, dt$
7.364	$t^{\mu} W_{k,\nu}(at) W_{-k,\nu}(at)$, $2\lvert \operatorname{Re} \nu \rvert < 2 + \operatorname{Re} \mu$	$\frac{a^{1-2\mu}}{2} \Gamma(\mu+\nu) \Gamma(\mu-\nu) \Gamma(2\mu) \times$ $\times \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+\mu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\right]^{-1} \times$ $\times {}_4F_3\left(\mu, \frac{1}{2}+\mu, \mu+\nu, \mu-\nu; \frac{1}{2}+\right.$ $\left.+k+\mu, \frac{1}{2}-k+\mu, \frac{1}{2}; -\frac{u^2}{a^2}\right)$
7.365	$t^{2\nu} e^{-\frac{t^2}{4}} M_{k,\nu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2} + \operatorname{Re} k$	$\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{3\nu}{2}-\frac{k}{2}} \Gamma(1+2\nu) [\Gamma(k-\nu)]^{-1} \times$ $\times u^{k-\nu-1} e^{-\frac{u^2}{4}} M_{\frac{1+k+3\nu}{2}, \frac{k-\nu-1}{2}}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
7.366	$t^{-2\nu-1} e^{-\frac{t^2}{2}} M_{-k,\nu}(t^2)$, $\operatorname{Re}(k-\nu) < \frac{1}{2}$	$2^{k-\nu} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(1+2\nu) \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\nu\right)\right]^{-1} \times$ $\times u^{\nu-k-1} e^{-\frac{u^2}{8}} W_{-\frac{2k+3\nu}{4}, \frac{\nu-k}{2}}\left(\frac{u^2}{4}\right)$
7.367	$t^{-2\nu-1} e^{-\frac{t^2}{4}} W_{k,\nu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re} \nu < \frac{1}{4}$	$\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}(1+k+3\nu)} \Gamma\left(\frac{1}{2}-2\nu\right) [\Gamma(1-k-\nu)]^{-1} \times$ $\times u^{k+\nu-1} e^{-\frac{u^2}{4}} M_{\frac{k-3\nu}{2}, -\frac{k+\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{2}\right)$

7.368	$t^{-2\nu-1}e^{\frac{t^2}{4}}W_{k,\nu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{4}$, $\operatorname{Re}(k-\nu)<0$	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}(k-3\nu-1)}\Gamma\left(\frac{1}{2}-2\nu\right)\times$ $\times\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-k\right)\right]^{-1}u^{\nu-k-1}e^{\frac{u^2}{4}}W_{\frac{k+3\nu}{2},\frac{k-\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
7.369	$t^{2\mu-1}e^{-\frac{t^2}{2}}W_{k,\nu}(t^2)$, $\operatorname{Re}\mu>\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu+\mu\right)[\Gamma(1-k+\mu)]^{-1}\times$ $\times{}_2F_2\left(\frac{1}{2}+\nu+\mu,\frac{1}{2}-\nu+\mu;\frac{1}{2},1-k+\mu;-\frac{u^2}{4}\right)$
7.370	$t^{-\frac{1}{2}}K_{\nu+\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)M_{k,\nu}(t^2)$, $\operatorname{Re}k>-\frac{3}{4}$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma(1+2\nu)\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)\right]^{-1}u^{-\frac{1}{2}}\times$ $\times W_{\frac{k-\nu}{2},\frac{1+4k}{8}}\left(\frac{u^2}{2}\right)M_{\frac{k-\nu}{2},\frac{4k-1}{8}}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
7.371	$t^{-\frac{3}{2}}W_{\nu+\mu,k-\frac{1}{8}}\left(\frac{t^2}{2}\right)M_{\nu-\mu,-k-\frac{1}{8}}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{8}$, $\operatorname{Re}k<\frac{3}{8}$	$\frac{1}{u}\left(\frac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{4}-2\mu\right)\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}-2k\right)\right]^{-1}\times$ $\times W_{\nu+k,\mu-\frac{1}{8}}\left(\frac{u^2}{2}\right)M_{\nu-k,-\mu-\frac{3}{8}}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
7.372	$W_{k,it}(a)$	$\frac{(\pi a)^{\frac{1}{2}}}{2^{k+1}}e^{-\frac{a}{2}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{u}{2}\right)\right]^2}D_{2k}\left[(2a)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
7.373	$\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+it\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-it\right)W_{k,it}(a)$	$\pi 2^k\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-2k)e^{\frac{a}{2}\left[\operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right)\right]^2}D_{2k-1}\left[(2a)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$

§ 13. Fonctions sphériques

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.374	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<1, \\ \mathfrak{P}_\nu(t) & \text{pour } t>1, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<0$	$\left(\frac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Y_{\nu+\frac{1}{2}}(u)-\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)J_{\nu+\frac{1}{2}}(u)\right]$
7.375	$\begin{cases} P_\nu(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$-\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\nu(\nu+1)\left[\Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\times$ $\times u^{-\frac{1}{2}}s_{-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}+\nu}(u)$
7.376	$\mathfrak{P}_\nu(1+t^2),\quad -1<\operatorname{Re}\nu<0$	$-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(\pi\nu)\,[K_{\nu+\frac{1}{2}}(2^{-\frac{1}{2}}u)]^2$
7.377	$\mathfrak{Q}_\nu(1+t^2),\quad \operatorname{Re}\nu>-1$	$2^{-\frac{1}{2}}\pi I_{\nu+\frac{1}{2}}(2^{-\frac{1}{2}}u)\,K_{\nu+\frac{1}{2}}(2^{-\frac{1}{2}}u)$
7.378	$\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{t^2+a^2+b^2}{2ab}\right),\quad -1<\operatorname{Re}\nu<0$	$-\frac{2}{\pi}\sqrt{ab}\sin(\pi\nu)\,K_{\nu+\frac{1}{2}}(au)\,K_{\nu+\frac{1}{2}}(bu)$
7.379	$\mathfrak{Q}_\nu\left(\frac{t^2+a^2+b^2}{2ab}\right),\quad \operatorname{Re}\nu>-1$	$\pi\sqrt{ab}\,I_{\nu+\frac{1}{2}}(bu)\,K_{\nu+\frac{1}{2}}(au),\quad a>b$

7.380	$\begin{cases} t^{\mu-1} P_\nu(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\mu > 0$	$\sqrt{\pi}\, 2^{-\mu}\Gamma(\mu)\left[\Gamma\left(1+\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)\right]^{-1}\times$ $\times {}_2F_3\left(\frac{\mu}{2}, \frac{1+\mu}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1+\mu-\nu}{2}, 1+\frac{\mu+\nu}{2}; -\frac{u^2}{4}\right)$
7.381	$(t^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \mathfrak{P}_\nu^\mu(t)$, $\operatorname{Re}(\mu+\nu)<0$, $\operatorname{Re}(\mu-\nu)<1$	$2^{\mu+1}\sqrt{\pi}\left[\Gamma\left(\frac{-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\right]^{-1}\times$ $\times u^{-\mu-\frac{1}{2}} S_{\mu-\frac{1}{2},\, \nu+\frac{1}{2}}(u)$
7.382	$[t(1+t)]^{-\frac{\mu}{2}} \mathfrak{P}_\nu^\mu(1+2t)$, $\operatorname{Re}\mu<1$, $-1-\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\mu$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, u^{\mu-\frac{1}{2}}\left\{J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left[\frac{u}{2}+\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\right]+\right.$ $\left.+Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left[\frac{u}{2}+\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\right]\right\}$
7.383	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<1, \\ (t^2-1)^{-\frac{\mu}{2}} \mathfrak{P}_\nu^\mu(t) & \text{pour } t>1, \end{cases}$ $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\mu<1$, $\operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}\nu>-1-\operatorname{Re}\mu$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, u^{\mu-\frac{1}{2}}\left\{J_{\nu+\frac{1}{2}}(u)\cos\left[\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\right]+\right.$ $\left.+Y_{\nu+\frac{1}{2}}(u)\sin\left[\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\right]\right\}$
7.384	$\begin{cases} (1-t^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\mu<1$	$\sqrt{\pi}\, 2^{\mu-1}\left[\Gamma\left(\frac{3-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\mu-\nu}{2}\right)\right]^{-1}\times$ $\times(\mu+\nu)(\mu-\nu-1)\, u^{\mu-\frac{1}{2}} s_{-\mu-\frac{1}{2},\, \nu+\frac{1}{2}}(u)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t) \cos(ut)\, dt$
7.385	$\begin{cases} t^{\lambda-1}(1-t^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu(t) & \text{pour } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1, \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\lambda > 0, \quad \mathrm{Re}\,\mu < 1$	$\sqrt{\pi}\, 2^{\mu-\lambda} \Gamma(\lambda) \left[\Gamma\left(1+\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}\right) \times \times \Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}\right)\right]^{-1} {}_2F_3\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}, 1+\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}; -\frac{u^2}{4}\right)$
7.386	$\begin{cases} P_\nu\left(\frac{t^2}{2a^2}-1\right) & \text{pour } 0 < t < 2a, \\ \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{t^2}{2a^2}-1\right) & \text{pour } t > 2a, \end{cases}$ $-1 < \mathrm{Re}\,\nu < 0$	$-\frac{\pi a}{2} \sin(\pi\nu) \{[J_{\nu+\frac{1}{2}}(au)]^2 + [Y_{\nu+\frac{1}{2}}(au)]^2\}$
7.387	$\begin{cases} Q_\nu\left(\frac{t^2}{2a^2}-1\right) & \text{pour } 0 < t < 2a, \\ \mathfrak{Q}_\nu\left(\frac{t^2}{2a^2}-1\right) & \text{pour } t > 2a, \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu > -1$	$-\frac{1}{2} \pi^2 a J_{\nu+\frac{1}{2}}(au)\, Y_{-\nu-\frac{1}{2}}(au)$
7.388	$\begin{cases} P_\nu\left(\frac{2t^2}{a^2}-1\right) & \text{pour } 0 < t < a, \\ 0 & \text{pour } t > a \end{cases}$	$\frac{1}{2} \pi a J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right) J_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)$
7.389	$\begin{cases} \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{a^2+b^2-t^2}{2ab}\right) & \text{pour } 0 < t < a-b, \\ 0 & \text{pour } t > a-b \end{cases}$	$\frac{1}{2} \pi \sqrt{ab} [J_{\nu+\frac{1}{2}}(bu)\, Y_{\nu+\frac{1}{2}}(au) - J_{\nu+\frac{1}{2}}(au)\, Y_{\nu+\frac{1}{2}}(bu)]$

7.390	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < a+b, \\ \mathfrak{P}_\nu\left(\dfrac{t^2-a^2-b^2}{2ab}\right) & \text{pour } t > a+b, \end{cases}$ $-1 < \operatorname{Re}\nu < 0$	$\frac{1}{2}\pi\sqrt{ab}\,[Y_{\nu+\frac{1}{2}}(au)\,Y_{-\nu-\frac{1}{2}}(bu) - J_{\nu+\frac{1}{2}}(au)\,J_{-\nu-\frac{1}{2}}(bu)]$
7.391	$\begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}\sin(\pi\nu)\,\mathfrak{Q}_\nu\left(\dfrac{a^2+b^2-t^2}{2ab}\right) \\ \qquad \text{pour } 0 < t < a-b, \\ P_\nu\left(\dfrac{t^2-a^2-b^2}{2ab}\right) \quad \text{pour } a-b < t < a+b, \\ 0 \quad \text{pour } t > a+b \end{cases}$	$\pi\sqrt{ab}\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(bu)\,J_{-\nu-\frac{1}{2}}(au)$
7.392	$\begin{cases} t^{-1}\,\mathfrak{P}_\nu(2t^2-1) & \text{pour } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1, \end{cases}$ $-1 < \operatorname{Re}\nu < 0$	$-\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}(\pi\nu)\,{}_1F_1(\nu+1;\ 1;\ iu)\,{}_1F_1(\nu+1;\ 1;\ -iu)$
7.393	$t^{-1}\,\mathfrak{Q}_\nu(1+2a^2t^{-2}),\quad \operatorname{Re}\nu > -1$	$\frac{\pi}{2}\Gamma(1+\nu)\,(au)^{-1}\,W_{-\nu-\frac{1}{2},\,0}(au)\times$ $\times[\operatorname{ctg}(\pi\nu)\,M_{\nu+\frac{1}{2},\,0}(au) - \operatorname{cosec}(\pi\nu)\,W_{-\nu-\frac{1}{2},\,0}(au)]$
7.394	$[(a+t)(b+t)]^{\frac{\nu}{2}}\,\mathfrak{P}_\nu\left[2\left(1+\frac{t}{a}\right)\left(1+\frac{t}{b}\right)-1\right],$ $-1 < \operatorname{Re}\nu < 0$	$\frac{\pi}{4}(ab)^{\frac{\nu+1}{2}}\left\{\cos\left(\pi\nu-\frac{au}{2}-\frac{ab}{2}\right)\times\right.$ $\times\left[J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{bu}{2}\right)+\right.$ $\left.+J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{bu}{2}\right)Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right]+$ $+\sin\left(\pi\nu-\frac{au}{2}-\frac{ab}{2}\right)\left[J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{bu}{2}\right)-\right.$ $\left.\left.-Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{bu}{2}\right)\right]\right\}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t) \cos(ut)\, dt$
7.395	$\mathfrak{P}_\nu(a \operatorname{ch} t), \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 0, \quad a \geqslant 1$	$-2^{\nu - \frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} \sin(\pi\nu) [\operatorname{ch}(\pi u) - \cos(\pi\nu)]^{-1} \times$ $\times \Gamma\left(\frac{1+\nu+iu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu-iu}{2}\right) \times$ $\times \{P^{-\nu-\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}+iu} [a^{-1}(a^2-1)^{\frac{1}{2}}] + P^{-\nu-\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}+iu} [-a^{-1}(a^2-1)^{\frac{1}{2}}]$
7.396	$(\operatorname{sh} t)^\mu \mathfrak{P}^\mu_\nu(\operatorname{ch} t), \quad \operatorname{Re}(1+\nu-\mu) > 0,$ $\operatorname{Re}(\nu+\mu) < 0$	$\pi^{-\frac{1}{2}} 2^{-\mu-2} \Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu+iu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu-iu}{2}\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{-\nu-\mu+iu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-\nu-\mu-iu}{2}\right) \times$ $\times \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right) \Gamma(-\nu-\mu) \Gamma(1+\nu-\mu)\right]^{-1}$
7.397	$(a^2 \operatorname{ch}^2 t - 1)^{\frac{\mu}{2}} \mathfrak{P}^\mu_\nu(a \operatorname{ch} t), \quad \operatorname{Re}(\mu+\nu) < 0,$ $\operatorname{Re}(1+\nu-\mu) > 0$	$\pi^{-\frac{1}{2}} 2^{-\mu-2} a^{\mu-\nu-1} \Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu+iu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu-iu}{2}\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{-\nu-\mu-iu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-\nu-\mu+iu}{2}\right) \times$ $\times \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right) \Gamma(1+\nu-\mu) \Gamma(-\nu-\mu)\right]^{-1} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{1+\nu-\mu+iu}{2}, \frac{1+\nu-\mu-iu}{2}; \frac{1}{2}-\mu; 1-\frac{1}{a^2}\right)$

7.398	$(a^2+b^2\operatorname{ch}^2 t)^{\frac{\nu+1}{2}} P_\nu^\mu\left[\frac{b\operatorname{ch} t}{(a^2+b^2\operatorname{ch}^2 t)^{\frac{1}{2}}}\right]$, $\operatorname{Re}(\nu-\mu+1)<0$	$2^{\nu-1}a^{-\mu}\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu+iu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu-iu}{2}\right)\times$ $\times[\Gamma(1-\mu)\Gamma(1+\nu-\mu)]^{-1}u^{\mu-\nu-1}\times$ $\times{}_2F_1\left(\frac{1+\nu-\mu+iu}{2}, \frac{1+\nu-\mu-iu}{2}, 1-\mu; -a^2b^{-2}\right)$
7.399	$(\operatorname{sh} t)^{-\nu-1}\mathfrak{Q}_\nu^\mu(\operatorname{cth} t)$, $-1<\operatorname{Re}(\nu+\mu)<0$	$e^{i\pi\mu}2^{\nu-2}[\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+\nu-\mu)]^{-1}\times$ $\times\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu+iu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu-iu}{2}\right)\times$ $\times\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu+iu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu-iu}{2}\right)$
7.400	$P_{-\frac{1}{2}+t}(\cos\varphi)$, $0<\varphi<\pi$	$\begin{cases}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\right]^{-1}(\sin\varphi)^\mu(\cos u-\cos\varphi)^{-\mu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<u<\varphi,\\ 0 & \text{pour } u>\varphi\end{cases}$
7.401	$\operatorname{sch}(\pi t)P_{-\frac{1}{2}+it}(a)$, $-1<a<1$	$2^{-\frac{1}{2}}(a+\operatorname{ch} u)^{-\frac{1}{2}}$
7.402	$\frac{\operatorname{th}(\pi t)}{\operatorname{sh}(\alpha t)}P_{-\frac{1}{2}+it}(a)$, $-1<a<1$	$\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\varepsilon_n\cos\left(n\frac{\pi}{\alpha}u\right)Q_{n\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{2}}(a)$, $-\alpha\leqslant u\leqslant\alpha$
7.403	$\mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+it}(a)$, $a>1$	$\begin{cases}2^{-\frac{1}{2}}(a-\operatorname{ch} u)^{-\frac{1}{2}} & \text{pour } \operatorname{ch} u<a,\\ 0 & \text{pour } \operatorname{ch} u>a\end{cases}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_c(u)=\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.404	$\operatorname{sch}(\pi t)\,\mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+it}(a), \quad a\geqslant 1$	$2^{-\frac{1}{2}}(a+\operatorname{ch} u)^{-\frac{1}{2}}$
7.405	$t^{-1}\operatorname{sch}(\pi t)\,[P_{\frac{1}{2}+it}(a)-P_{\frac{1}{2}-it}(a)], \quad -1<a<1$	$i2^{\frac{3}{2}}\,[(a+\operatorname{ch} u)^{\frac{1}{2}}-(1+\operatorname{ch} u)^{\frac{1}{2}}]$
7.406	$t^{-1}\operatorname{sch}(\pi t)\,[\mathfrak{P}_{\frac{1}{2}+it}(a)-\mathfrak{P}_{\frac{1}{2}-it}(a)], \quad a>1$	$i2^{\frac{3}{2}}\,[(a+\operatorname{ch} u)^{\frac{1}{2}}-(1+\operatorname{ch} u)^{\frac{1}{2}}]$
7.407	$[\operatorname{sch}(\pi t)]^2 P_{-\frac{1}{2}+it}(a), \quad -1<a<1$	$2^{-\frac{1}{2}}\pi^{-1}(\operatorname{ch} u-a)^{-\frac{1}{2}}\ln\left[\dfrac{(\operatorname{ch} u+1)^{\frac{1}{2}}+(\operatorname{ch} u-a)^{\frac{1}{2}}}{(\operatorname{ch} u+1)^{\frac{1}{2}}-(\operatorname{ch} u-a)^{\frac{1}{2}}}\right]$
7.408	$[\operatorname{sch}(\pi t)]^2\,\mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+it}(a), \quad a>1$	$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}(a-\operatorname{ch} u)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\left[\left(\dfrac{a-\operatorname{ch} u}{1+\operatorname{ch} u}\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } \operatorname{ch} u<a,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{2}}(\operatorname{ch} u-a)^{-\frac{1}{2}}\ln\left[\dfrac{(\operatorname{ch} u+1)^{\frac{1}{2}}+(\operatorname{ch} u-a)^{\frac{1}{2}}}{(\operatorname{ch}+1)^{\frac{1}{2}}-(\operatorname{ch} u-a)^{\frac{1}{2}}}\right] & \text{pour } \operatorname{ch} u>a\end{cases}$

7.409	$\mathfrak{P}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+it}(a), \quad a>1$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\right]^{-1}(a^2-1)^{\frac{\mu}{2}}(a-\operatorname{ch}u)^{-\mu-\frac{1}{2}} & \text{pour } \operatorname{ch}u<a, \\ 0 & \text{pour } \operatorname{ch}u>a \end{cases}$
7.410	$\Gamma(\mu+it)\,\Gamma(\mu-it)\,\mathfrak{P}^{\frac{1}{2}-\mu}_{-\frac{1}{2}+it}(a),$ $a>1, \quad \operatorname{Re}\mu>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Gamma(\mu)\,(a^2-1)^{\frac{1}{2}\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}(a+\operatorname{ch}u)^{-\mu}$
7.411	$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}+\frac{it}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}-\frac{it}{2}\right)}{\operatorname{ch}(\pi t)+\sin(\pi\mu)}\times$ $\times\left[P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+it}(a)+P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+it}(-a)\right],$ $-1<a<1, \quad -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}$	$2^{\mu+1}\pi^{\frac{3}{2}}\sec(\pi\mu)\,(1-a^2)^{-\frac{1}{4}}\mathfrak{P}_{u-\frac{1}{2}}\left[(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}u\right]$
7.412	$Q_{-\frac{1}{2}+it}(\cos\varphi+Q_{-\frac{1}{2}-it}(\cos\varphi), \quad 0<\varphi<\pi$	$\pi 2^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}u-\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}$
7.413	$\mathfrak{Q}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch}a)+\mathfrak{Q}^{\mu}_{-\frac{1}{2}-it}(\operatorname{ch}a),$ $\operatorname{Re}\mu>\frac{1}{2}$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } u<a, \\ 2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\right]^{-1}(\operatorname{sh}a)^{\mu}e^{i\pi\mu}(\operatorname{ch}u-\operatorname{ch}a)^{-\mu-\frac{1}{2}} & \text{pour } u>a \end{cases}$
7.414	$\operatorname{sch}(\pi t)\left[\mathfrak{Q}^{\mu-\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch}a)-\mathfrak{Q}^{\mu-\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-it}(\operatorname{ch}a)\right]$ $\operatorname{Re}\mu>0$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{i\pi\mu}\,\Gamma(\mu)\,(\operatorname{sh}a)^{\mu-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}u)^{-\mu}$

§ 14. Fonctions diverses

n°	$f(t)$	$F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$
7.415	$\begin{cases} a^{-1}K(ta^{-1}) & \text{pour } 0<t<a, \\ t^{-1}K(at^{-1}) & \text{pour } t>a \end{cases}$	$-\frac{\pi^2}{4} J_0\left(\frac{au}{2}\right) Y_0\left(\frac{au}{2}\right)$
7.416	$(a+t)^{-\frac{1}{2}} K[t^{\frac{1}{2}}(a+t)^{-\frac{1}{2}}]$	$-\frac{1}{4}\pi^{\frac{3}{2}}u^{-\frac{1}{2}}\left[J_0\left(\frac{au}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{au}{2}\right)+\right.$ $\left.+Y_0\left(\frac{au}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{au}{2}\right)\right]$
7.417	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} K\left[\left(\frac{b^2+t^2}{a^2+t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$	$\frac{1}{2}K_0\left[\frac{u(a+b)}{2}\right]K_0\left[\frac{u(a-b)}{2}\right], \quad a>b$
4.418	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} K[b(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}]$	$\frac{\pi}{2}K_0\left\{\frac{u}{2}[a+(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\} I_0\left\{\frac{u}{2}[a-(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\}, \quad a>b$
7.419	$\operatorname{sch}(at)\,K[\operatorname{th}(at)]$	$\frac{1}{16\pi a}\left\lvert\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{u}{4a}\right)\right\rvert^4$

7.420	$(a \operatorname{ch} t+1)^{-\frac{1}{2}} K\left[\left(\frac{a \operatorname{ch} t-1}{a \operatorname{ch} t+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$	$2^{-\frac{7}{2}}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sch}(\pi u)\, \Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{u}{2}\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{1}{4}-i\frac{u}{2}\right)\{P_{-\frac{1}{2}+iu}[(1-a^{-2})^{\frac{1}{2}}]+$ $+P_{-\frac{1}{2}+iu}[-(1-a^{-2})^{\frac{1}{2}}]\}$
7.421	$\left[\vartheta_0\left(0, \frac{1}{\pi} e^{2t}\right)+\vartheta_2\left(0, \frac{1}{\pi} e^{2t}\right)-\right.$ $\left.-\vartheta_3\left(0, \frac{1}{\pi} e^{2t}\right)\right] e^{\frac{x}{2}}$	$\frac{1}{2}\left(2^{\frac{1}{2}+iu}-1\right)\left(1-2^{\frac{1}{2}-iu}\right) \pi^{-\frac{1}{4}-\frac{iu}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{u}{2}\right) \times$ $\times \zeta\left(\frac{1}{2}+iu\right)$
7.422	$e^{\frac{x}{2}}\left[\vartheta_3\left(0, \frac{1}{\pi} e^{2t}\right)-1\right]$	$2(1+4u^2)^{-1}[1-2\xi(u)]$

CHAPITRE VIII

DÉVELOPPEMENT DE FOURIER EN SÉRIE DE SINUS

§ 1. Formules fondamentales

n°	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t) \sin(ut)\, dt$
8.1	$F_s(t)$	$\frac{\pi}{2} f(u)$
8.2	$f(at),\ a > 0$	$a^{-1} F_s(a^{-1}u)$
8.3	$f(at) \cos(bt),\ a,\ b > 0$	$\frac{1}{2a}\left[F_s\left(\frac{u+b}{a}\right) + F_s\left(\frac{u-b}{a}\right)\right]$
8.4	$f(at) \sin(bt),\ a,\ b > 0$	$\frac{1}{2a} \int_0^\infty f(t) \cos\left(\frac{u-b}{a} t\right) dt - \frac{1}{2a} \int_0^\infty f(t) \cos\left(\frac{u+b}{a} t\right) dt$
8.5	$t^{2n} f(t)$	$(-1)^n \frac{d^{2n}}{du^{2n}} F_s(u)$
8.6	$t^{2n+1} f(t)$	$(-1)^{n+1} \frac{d^{2n+1}}{du^{2n+1}} \int_0^\infty f(t) \cos(ut)\, dt$

§ 2. Fonctions rationnelles et irrationnelles

8.7	$\begin{cases} 1 \text{ pour } 0<t<a, \\ 0 \text{ pour } t>a \end{cases}$	$u^{-1}[1-\cos(au)]$
8.8	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<b, \\ (a+t)^{-n} & \text{pour } t>b,\ n=1, 2, 3,\ldots \end{cases}$	$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{(m-1)!}{(n-1)!} \cos\left[\frac{\pi}{2}(n-m)-bu\right](a+b)^{-m} \times$ $\times(-u)^{n-m-1}-\frac{(-u)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\cos\left(au+\frac{\pi n}{2}\right)\times\right.$ $\left.\times \operatorname{Ci}(au+bu)+\sin\left(au+\frac{\pi n}{2}\right)\operatorname{si}(au+bu)\right]$
8.9	$\frac{\sqrt{t}}{t+a}$	$\left(\frac{2u}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}+\pi a^{\frac{1}{2}}\sin(au)[1-C(au)-S(au)]-$ $-\pi a^{\frac{1}{2}}\cos(au)[C(au)-S(au)]$
8.10	$t(a^2+t^2)^{-n}$	$2^{2-2n}a^{3-2n}\pi[(n-1)!]^{-1}ue^{-au}\times$ $\times\sum_{m=0}^{n-2}(2n-m-4)!(2au)^m[m!(n-m-2)!]^{-1}$
8.11	$t^{-1}(a^2+t^2)^{-1}$	$\frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-au})$
8.12	$t^{2m+1}(a^2+t^2)^{-n-\frac{1}{2}}$, $-1\leqslant m<n$	$(-1)^{m+1}(2a)^{-n}\pi^{\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\times\frac{d^{2m+1}}{du^{2m+1}}[u^nK_n(au)]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.13	$t^{2m-1}(t^{2n}+a^{2n})^{-1},\ m\leqslant n\ (n,\ m=1,\ 2,\ 3,\ldots)$	$-\frac{\pi}{2n}a^{2m-2n}\sum_{k=1}^{n}e^{-au\sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]}\times$ $\times\cos\left[\frac{1}{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)2\pi m+au\cos\frac{\pi}{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]$
8.14	$t^{-1}(t^{2n}+a^{2n})^{-1},\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots$	$\frac{\pi}{2}a^{-2n}\left\{1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{-au\sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]}\times\right.$ $\left.\times\cos\left[au\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]\right\}$
8.15	$t^{2m+1}(a+t^2)^{-n-1},\ m\leqslant n\ (n,\ m=1,\ 2,\ 3,\ldots)$	$\frac{(-1)^{n+m}}{n!}\frac{\pi}{2}\frac{d^n}{da^n}(a^m e^{-u\sqrt{a}})$
8.16	$t^{-\nu},\ 0<\mathrm{Re}\,\nu<2$	$\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\Gamma(1-\nu)u^{\nu-1}$
8.17	$\begin{cases}t^{\nu-1} & \text{pour } 0<t<a,\\ 0 & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\frac{i}{2\nu}a^{\nu}\left[{}_1F_1(\nu;\ \nu+1;\ -iau)-{}_1F_1(\nu;\ \nu+1;\ iau)\right]$
8.18	$\begin{cases}(a-t)^{\nu} & \text{pour } 0<t<a,\\ 0 & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\frac{i}{2(\nu+1)}a^{\nu+1}\left[{}_1F_1(1;\ \nu+2;\ -iau)-{}_1F_1(1;\ \nu+2;\ iau)\right]$

8.19	$\begin{cases} t^{\nu}(a-t)^{\nu} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+1)\left(\frac{2u}{a}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}}\sin(au)\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(au)$
8.20	$\begin{cases} t^{\nu-1}(a-t)^{\mu-1} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu>0$	$\frac{i}{2}\,\mathrm{B}(\nu,\ \mu)\,a^{\nu+\mu-1}\,[{}_1F_1(\nu;\ \nu+\mu;\ -iau)-{}_1F_1(\nu;\ \nu+\mu;\ iau)]$
8.21	$t^{\nu}(a+t)^{-1},\ -2<\operatorname{Re}\nu<1$	$(2a)^{\nu}(\pi au)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}S_{-\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(au)-\right.$ $\left.-2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}S_{-\nu-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}}(au)\right]$
8.22	$t^{\nu}(a^2+t^2)^{-1},\ -2<\operatorname{Re}\nu<2$	$2^{\nu-2}\,\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}u^{1-\nu}\times$ $\times\,{}_1F_2\left(1;\ \frac{3}{2}-\frac{\nu}{2},\ 1-\frac{\nu}{2};\ \frac{a^2u^2}{4}\right)-$ $-\frac{\pi}{2}\,a^{\nu-1}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\operatorname{sh}(au)$
8.23	$(a^2+t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$2^{-\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)u^{\nu}a^{-\nu}\,[I_{\nu}(au)-\mathbf{L}_{-\nu}(au)]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t) \sin(ut)\, dt$
8.24	$t^{-1}(a^2+t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}$, $\operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{\pi}{2} a^{-2\nu} u \left[K_\nu(au) \mathbf{L}_{\nu-1}(au) + \mathbf{L}_\nu(au) K_{\nu-1}(au)\right]$
8.25	$\begin{cases} (a^2-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{2a}{u}\right)^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right) \mathbf{H}_\nu(au)$
8.26	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ (t^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \left(\frac{u}{2a}\right)^\nu J_\nu(au)$
8.27	$\begin{cases} t(a^2-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$	$2^{\nu-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} a^{\nu+1} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right) u^{-\nu} J_{\nu+1}(au)$
8.28	$\begin{cases} t^{-1}(a^2-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$	$\frac{\pi^2}{4} \sec(\pi\nu)\, a^{2\nu} u \left[J_\nu(au) \mathbf{H}_{-\nu-1}(au) + \mathbf{H}_{-\nu}(au) J_{\nu+1}(au)\right]$

8.29	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < a, \\ t\,(t^2-a^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } \quad t > a, \end{cases}$ $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < 0$	$2^{\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}a^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)u^{-\nu}Y_{-\nu-1}(au)$
8.30	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < a, \\ t^{-1}\,(t^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } \quad t > a, \end{cases}$ $-1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$	$\frac{\pi^2}{4}\sec(\pi\nu)\,a^{-2\nu}u\,[\mathbf{H}_\nu(au)\,Y_{\nu-1}(au) - Y_\nu(au)\,\mathbf{H}_{\nu-1}(au)]$
8.31	$t\,(a^2+t^2)^{\nu-\frac{3}{2}}$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\,(2a)^\nu\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\right]^{-1}u^{1-\nu}K_\nu(au)$
8.32	$(t^2+2\,at)^{-\nu-\frac{1}{2}}$, $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{u}{2a}\right)^\nu[J_\nu(au)\cos(au) + Y_\nu(au)\sin(au)]$
8.33	$\begin{cases} (2at-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0 < t < 2a, \\ 0 & \text{pour } \quad t > 2a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)(2a)^\nu u^{-\nu}\sin(au)\,J_\nu(au)$
8.34	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < 2a, \\ (t^2-2at)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } \quad t > 2a, \end{cases}$ $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{u}{2a}\right)^\nu[J_\nu(au)\cos(au) - Y_\nu(au)\sin(au)]$

Suite

nº	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t) \sin(ut)\, dt$
8.35	$[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^{-\nu}$, $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{1}{a^\nu u}+\frac{1}{a^\nu u}\pi\nu \operatorname{cosec}(\pi\nu)\left[I_\nu(au)\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)-\frac{1}{2}J_\nu(iau)-\right.$ $\left.-\frac{1}{2}J_\nu(-iau)\right]$
8.36	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^{-\nu}$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\pi \operatorname{cosec}(\pi\nu)\, a^{-\nu}\left[I_\nu(au)\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)+\frac{1}{2}iJ_\nu(iau)-\frac{1}{2}iJ_\nu(-iau)\right]$
8.37	$t^{-\frac{1}{2}}(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^\nu$, $\operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}$	$a^\nu\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right) K_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)$
8.38	$t^{-\nu-\frac{1}{2}}(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+a]^\nu$, $\operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}$	$\frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{\nu}{2},\frac{1}{4}}(au)\, M_{-\frac{\nu}{2},\frac{1}{4}}(au)$
8.39	$(a+it)^\nu-(a-it)^\nu$, $\operatorname{Re}\nu < 0$	$\pi i\,[\Gamma(-\nu)]^{-1}\, u^{-\nu-1}\, e^{-au}$
8.40	$t^{2n}[(a+it)^{-\nu}-(a-it)^{-\nu}]$, $0 \leqslant 2n < \operatorname{Re}\nu$	$(-1)^n\, \pi i\,(2n)!\,[\Gamma(\nu)]^{-1}\, u^{\nu-2n-1} e^{-au} L_{2n}^{(\nu-2n-1)}(au)$
8.41	$t\,[(a+it)^{-\nu}+(a-it)^{-\nu}]$, $\operatorname{Re}\nu > 1$	$-\pi\,[\Gamma(\nu)]^{-1}\, u^{\nu-2}\,(1-au)\, e^{-au}$
8.42	$t^{-1}[(a+it)^{-\nu}+(a-it)^{-\nu}]$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\frac{\pi}{a^\nu}[\Gamma(\nu)]^{-1}\gamma(\nu, au)$
8.43	$t^{2n+1}[(a+it)^{-\nu}+(a-it)^{-\nu}]$, $-1 \leqslant 2n+1 < \operatorname{Re}\nu$	$(-1)^{n+1}\,\pi\,[\Gamma(\nu)]^{-1}\, e^{-au}\, u^{\nu-2n-2}(2n+1)!\, L_{2n+1}^{(\nu-2n-2)}(au)$

8.44	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}\{[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^{\nu}-$ $-[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]^{\nu}\}$, $-1<\mathrm{Re}\,\nu<1$	$2a^{\nu}\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)K_{\nu}(au)$
8.45	$(2at+t^2)^{-\frac{1}{2}}\{[a+t+(2at+t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}+$ $+[a+t-(2at+t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}\}$, $-1<\mathrm{Re}\,\nu<1$	$\pi a^{\nu}\left[\sin\left(au-\frac{\pi\nu}{2}\right)Y_{\nu}(au)+\cos\left(au-\frac{\pi\nu}{2}\right)J_{\nu}(au)\right]$
8.46	$\begin{cases}(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\{[t+i(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}+ \\ +[t-i(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}\} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a,\end{cases}$	$\frac{\pi}{2}a^{\nu}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)[\mathbf{J}_{\nu}(au)-\mathbf{J}_{-\nu}(au)]$
8.47	$\begin{cases}t^{-\nu-\frac{1}{2}}(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\{[a+(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}+ \\ +[a-(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu}\} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $-\frac{3}{2}<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{3}{2}$	$(2a)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2},\ \frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}\right)u\,{}_1F_1\left(\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ -iau\right)\times$ $\times\,{}_1F_1\left(\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ iau\right)$
8.48	$\begin{cases}t^{\nu}(a^2-t^2)^{\mu} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu>-2,\ \mathrm{Re}\,\mu>-1$	$\frac{a^{\nu+2\mu+2}}{2}\,\mathrm{B}\left(\mu+1,\ 1+\frac{\nu}{2}\right)u\times$ $\times\,{}_1F_2\left(1+\frac{\nu}{2};\ \frac{3}{2},\ 2+\mu+\frac{\nu}{2};\ -\frac{a^2u^2}{4}\right)$

Suite

nº	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.49	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ (t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\{[t+(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu + \\ +[t-(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu\} & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\pi a^\nu\left[\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)J_\nu(au)-\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Y_\nu(au)\right]$
8.50	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ t^{-\frac{1}{2}}(t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\{[t+(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu + \\ +[t-(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu\} & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$	$-\frac{\pi}{2}a^\nu\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[J_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)Y_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)+\right.$ $\left.+J_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)Y_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)\right]$
8.51	$\begin{cases} t^{-\frac{1}{2}}(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\{[t+i(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu + \\ +[t-i(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu\} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a \end{cases}$	$2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}a^\nu u^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)J_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\left(\frac{au}{2}\right)$
8.52	$t^\nu(a^2+t^2)^{-\mu-1}$, $\operatorname{Re}\nu>-2,\ \operatorname{Re}(\nu-2\mu)<2$	$\frac{a^{\nu-2\mu}}{2}\mathrm{B}\left(1+\frac{\nu}{2},\ \mu-\frac{\nu}{2}\right)u\times$ $\times{}_1F_2\left(1+\frac{\nu}{2};\ 1+\frac{\nu}{2}-\mu,\frac{3}{2};\ \frac{a^2u^2}{4}\right)+$

		$+2^{\nu-2\mu-2}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\left[\Gamma\left(\mu-\frac{\nu}{2}+\frac{3}{2}\right)\right]^{-1}\times$ $\times\, u^{2\mu-\nu+1}{}_1F_2\left(\mu+1;\ \mu-\frac{\nu}{2}+\frac{3}{2},\ \mu-\frac{\nu}{2}+1;\ \frac{a^2u^2}{4}\right)$

§ 3. Fonctions exponentielles

8.53	$t^n e^{-at}$	$n!\, a^{n+1}(a^2+u^2)^{-n-1}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\binom{n+1}{2m+1}\left(\frac{u}{a}\right)^{2m+1}$
8.54	$t^{n-\frac{1}{2}}e^{-at}$	$(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n}{da^n}\{(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}[(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-a]^{\frac{1}{2}}\}$
8.55	$t^{\nu-1}e^{-at}$	$\Gamma(\nu)(a^2+u^2)^{-\frac{\nu}{2}}\sin\left[\nu\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)\right]$
8.56	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<b,\\ (t-b)^\nu e^{-at} & \text{pour } t>b,\end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\Gamma(1+\nu)(a^2+u^2)^{-\frac{\nu+1}{2}}e^{-ab}\sin\left[bu+(\nu+1)\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)\right]$
8.57	$t^{\nu-1}(e^{at}+1)^{-1}$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\Gamma(\nu)\left\{u^{-\nu}\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)+\frac{i}{2}(2a)^{-\nu}\times\right.$ $\times\left[\zeta\left(\nu,\frac{1}{2}+i\frac{u}{2a}\right)-\zeta\left(\nu,\frac{1}{2}-i\frac{u}{2a}\right)-\right.$ $\left.\left.-\zeta\left(\nu,i\frac{u}{2a}\right)+\zeta\left(\nu,-i\frac{u}{2a}\right)\right]\right\}$

Suite

nº	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t) \sin(ut)\, dt$
8.58	$t^{\nu-1}(e^{at}-1)^{-1}$, $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{i\,\Gamma(\nu)}{2a^\nu}\left[\zeta\left(\nu,\ 1+i\frac{u}{a}\right)-\zeta\left(\nu,\ 1-i\frac{u}{a}\right)\right]$
8.59	$e^{-nt}(1-e^{-t})^{-1}$	$\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2u}+\pi(e^{2\pi u}-1)^{-1}-u\sum_{m=1}^{n-1}(u^2+m^2)^{-1}$
8.60	$e^{-at}(1-e^{-bt})^{\nu-1}$, $\operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{i}{2b}\left[\mathrm{B}\left(\nu,\ \frac{a+iu}{b}\right)-\mathrm{B}\left(\nu,\ \frac{a-iu}{b}\right)\right]$
8.61	$t^{2n+1}e^{-at^2}$	$(-1)^n 2^{-n-\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}a^{-n-1}e^{-\frac{u^2}{4a}}\mathrm{He}_{2n+1}[(2a)^{-\frac{1}{2}}u]$
8.62	$t^{\nu-1}e^{-at^2}$	$\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)u\,{}_1F_1\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ -\frac{u^2}{4a}\right)$
8.63	$t^{\nu-1}e^{-at-bt^2}$, $\operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{i}{2}\Gamma(\nu)(2b)^{-\frac{\nu}{2}}e^{\frac{a^2-u^2}{8b}}\{e^{i\frac{au}{4b}}D_{-\nu}[(2b)^{-\frac{1}{2}}(a+iu)]-$ $-e^{-i\frac{au}{4b}}D_{-\nu}[(2b)^{-\frac{1}{2}}(a-iu)]\}$
8.64	$t^{\nu-1}e^{-\frac{a}{t}}$	$ia^{\frac{\nu}{2}}u^{-\frac{\nu}{2}}\{e^{-i\pi\frac{\nu}{4}}K_\nu[2(iau)^{\frac{1}{2}}]-e^{i\pi\frac{\nu}{4}}K_\nu[2(-iau)^{\frac{1}{2}}]\}$
8.65	$t^{\nu-1}e^{-at-\frac{b}{t}}$, $\operatorname{Re} \nu > -1$	$ib^{\frac{\nu}{2}}\{(a+iu)^{-\frac{\nu}{2}}K_\nu[2b^{\frac{1}{2}}(a+iu)^{\frac{1}{2}}]-$ $-(a-iu)^{-\frac{\nu}{2}}K_\nu[2b^{\frac{1}{2}}(a-iu)^{\frac{1}{2}}]\}$

8.66	$t^{\nu-1}e^{-a\sqrt{t}}$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$i2^{-\nu}\Gamma(2\nu)u^{-\nu}\left\{e^{-i\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{a^2}{8u}\right)}D_{-2\nu}\left[\frac{a(1-i)}{2\sqrt{u}}\right]-e^{i\left(\frac{\pi}{2}\nu+\frac{a^2}{8u}\right)}D_{-2\nu}\left[\frac{a(1+i)}{2\sqrt{u}}\right]\right\}$
8.67	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-b\sqrt{a^2+t^2}}\times\{[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^{\nu}-[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]^{\nu}\}$	$2a^{\nu}\sin\left(\nu\operatorname{arctg}\frac{u}{b}\right)K_{\nu}[a(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$
8.68	$t^{\nu-\frac{1}{2}}(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-b\sqrt{a^2+t^2}}\times[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+a]^{-\nu}$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}$	$2^{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)u^{-\frac{1}{2}}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+b]^{\frac{1}{4}}\times D_{-\nu-\frac{1}{2}}\{(2a)^{\frac{1}{2}}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+b]^{\frac{1}{2}}\}\times M_{\frac{\nu}{2},\frac{1}{4}}\{a[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-b]\}$
8.69	$\begin{cases} t^{-2\nu-\frac{1}{2}}(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\times\{[a-(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^{2\nu}e^{b\sqrt{a^2-t^2}}+[a+(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}]^{2\nu}e^{-b\sqrt{a^2-t^2}}\} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\left(\frac{3}{4}\pm\nu\right)>0$	$\frac{2}{a}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{4}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\nu\right)u^{-\frac{1}{2}}\times M_{\nu,\frac{1}{4}}\{a[b+(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]\}\times M_{-\nu,\frac{1}{4}}\{a[b-(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]\}$, $0<u<b$

§ 4. Fonctions trigonométriques

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.70	$t^{\nu-1}\sin(at),\ -2<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi}{4}[\Gamma(1-\nu)]^{-1}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)[\,\lvert u-a\rvert^{-\nu}-\lvert u+a\rvert^{-\nu}]$
8.71	$t^{-\nu}\sin(at)\sin(bt),\ 0<\operatorname{Re}\nu<4,\ a\geqslant b$	$\frac{1}{4}\Gamma(1-\nu)\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)[(u+a-b)^{\nu-1}-(u+a+b)^{\nu-1}-$ $-\operatorname{sign}(a-b-u)\lvert u-a+b\rvert^{\nu-1}+$ $+\operatorname{sign}(a+b-u)\lvert u-a-b\rvert^{\nu-1}]$
8.72	$\left[\frac{\sin(at)}{t}\right]^{2m},\ m=1,2,3,\ldots$	$(-1)^m 2m2^{-2m}\{(m!)^{-2}u\ln\left(\frac{u}{a}\right)+$ $+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\left[(u-2an)^{2m-1}\ln\left\lvert\frac{u}{a}-2n\right\rvert\right]}{(m-n)!\,(m+n!)}+$ $+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{\left[(u+2an)^{2m-1}\ln\left(\frac{u}{a}+2n\right)\right]}{(m-n)!\,(m+n)!}$
8.73	$e^{-at}(\sin t)^{2n},\ n=0,1,2,\ldots$	$\frac{-(-4)^{-n-1}}{2n+1}\left\{\left[\left(\frac{\frac{u}{2}+\frac{ia}{2}+n}{2n+1}\right)\right]^{-1}+\left[\left(\frac{\frac{u}{2}-\frac{ia}{2}+n}{2n+1}\right)\right]^{-1}\right\}$
8.74	$e^{-at}(\sin t)^{2n-1},\ n=1,2,3,\ldots$	$-\frac{i}{n}(-4)^{-n-1}\left\{\left[\left(\frac{n-\frac{1}{2}+\frac{u}{2}-i\frac{a}{2}}{2n}\right)\right]^{-1}-\right.$

		$-\left[\left(\dfrac{n-\frac{1}{2}+\frac{u}{2}+i\frac{a}{2}}{2n}\right)\right]^{-1}\Bigg\}$
8.75	$\begin{cases} [\sin(\pi t)]^{\nu-1} & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>0$	$2^{1-\nu}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{u}{2\pi}\right)\times$ $\times\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{u}{2\pi}\right)\right]^{-1}$
8.76	$t^{\nu-1}\cos(at),\ -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\Gamma(\nu)}{2}\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)[(u+a)^{-\nu}+\operatorname{sign}(u-a)\,\lvert u-a\rvert^{-\nu}]$
8.77	$\begin{cases} (\operatorname{ch} a-\cos t)^{-\nu} & \text{pour } 0<t<\pi, \\ 0 & \text{pour } t>\pi, \end{cases}$	$2^{1-\nu}[\Gamma(\nu)]^{-1}e^{(\nu-1)a}(\operatorname{sh} a)^{1-2\nu}\cdot u\times$ $\times\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(u^2-n^2)^{-1}(n!)^{-1}\Gamma(n+\nu)\times$ $\times[1-(-1)^n\cos(\pi u)]\,e^{-na}\times$ $\times{}_2F_1(1-\nu,\ n+1-\nu;\ n+1;\ e^{-2a})$
8.78	$t^{\nu-1}\sin(at^2),\ -2<\operatorname{Re}\nu<2$	$\frac{iu}{4}\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)a^{-\frac{\nu+1}{2}}\times$ $\times\left[e^{-i\frac{\pi}{4}(3-\nu)}{}_1F_1\left(\frac{1+\nu}{2};\frac{3}{2};-\frac{iu^2}{4a}\right)-\right.$ $\left.-e^{i\frac{\pi}{4}(3-\nu)}{}_1F_1\left(\frac{\nu+1}{2};\frac{3}{2};\frac{iu^2}{4a}\right)\right]$
8.79	$t^{\nu-1}\cos(at^2),\ -1<\operatorname{Re}\nu<2$	$-\frac{1}{4}u\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)a^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}\times$ $\times\left[e^{i\frac{\pi}{4}(\nu-3)}{}_1F_1\left(\frac{\nu+1}{2};\frac{3}{2};-\frac{iu^2}{4a}\right)+\right.$ $\left.+e^{-i\frac{\pi}{4}(\nu-3)}{}_1F_1\left(\frac{\nu+1}{2};\frac{3}{2};\frac{iu^2}{4a}\right)\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.80	$t^{\nu-1}\sin\left(\frac{a}{t}\right), \quad -2 < \operatorname{Re}\nu < 2$	$\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{u}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left\{\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)J_\nu[2(au)^{\frac{1}{2}}] + \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)Y_\nu[2(au)^{\frac{1}{2}}] + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)K_\nu[2(au)^{\frac{1}{2}}]\right\}$
8.81	$t^{\nu-1}\cos\left(\frac{a}{t}\right), \quad -2 < \operatorname{Re}\nu < 2$	$\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{u}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)J_\nu[2(au)^{\frac{1}{2}}] - \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)Y_\nu[2(au)^{\frac{1}{2}}] + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)K_\nu[2(au)^{\frac{1}{2}}]\right\}$
8.82	$t^{-\nu}\sin(a\sqrt{t}), \quad 0 < \operatorname{Re}\nu < \frac{5}{2}$	$-\frac{ia}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)u^{\nu-\frac{3}{2}} \times \left[e^{i\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{}_1F_1\left(\frac{3}{2}-\nu; \frac{3}{2}; i\frac{a^2}{4u}\right) - e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{}_1F_1\left(\frac{3}{2}-\nu; \frac{3}{2}; -i\frac{a^2}{4u}\right)\right]$
8.83	$t^{-\nu}\cos(a\sqrt{t}), \quad 0 < \operatorname{Re}\nu < 2$	$\frac{1}{2}u^{\nu-1}\Gamma(1-\nu)\left[e^{-i\frac{\pi}{2}}{}_1F_1\left(1-\nu; \frac{1}{2}; -i\frac{a^2}{4u}\right) + e^{i\frac{\pi}{2}\nu}{}_1F_1\left(1-\nu; \frac{1}{2}; i\frac{a^2}{4u}\right)\right]$

8.84	$t^{\nu-1}\, e^{-a\sqrt{t}} \cos\left(a\sqrt{t}-\frac{\nu\pi}{2}\right)$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (2u)^{-\nu} e^{-\frac{a^2}{4u}} D_{2\nu-1}\left(\frac{a}{\sqrt{u}}\right)$
8.85	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]\times$ $\times\{[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^{\nu}-[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]^{\nu}\}$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} a^{\nu}\left[\left(\frac{b+u}{b-u}\right)^{\frac{\nu}{2}}-\left(\frac{b-u}{b+u}\right)^{\frac{\nu}{2}}\right]\times \\ \times\left\{\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) J_{\nu}[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]-\right. \\ \left.-\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) Y_{\nu}[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]\right\} \text{ pour } 0<u<b, \\ a^{\nu}\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left[\left(\frac{u+b}{u-b}\right)^{\frac{\nu}{2}}+\left(\frac{u-b}{u+b}\right)^{\frac{\nu}{2}}\right]\times \\ \times K_{\nu}[a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}] \text{ pour } u>b \end{cases}$
8.86	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} \sin[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]\times$ $\times\{[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+t]^{\nu}-[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-t]^{\nu}\}$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} a^{\nu}\left[\left(\frac{b+u}{b-u}\right)^{\frac{\nu}{2}}-\left(\frac{b-u}{b+u}\right)^{\frac{\nu}{2}}\right]\times \\ \times\left\{\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) J_{\nu}[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]+\right. \\ \left.+\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) Y_{\nu}[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]\right\} \text{ pour } 0<u<b, \\ a^{\nu}\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\left[\left(\frac{u+b}{u-b}\right)^{\frac{\nu}{2}}-\left(\frac{u-b}{u+b}\right)^{\frac{\nu}{2}}\right]\times \\ \times K_{\nu}[a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}] \text{ pour } u>b \end{cases}$

§ 5. Fonctions trigonométriques inverses

nº	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t) \sin(ut)\,dt$
8.87	$\begin{cases} \arcsin t & \text{pour } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1 \end{cases}$	$\frac{\pi}{2u}[J(u) - \cos u]$
8.88	$\begin{cases} \arccos t & \text{pour } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1 \end{cases}$	$\frac{\pi}{2u}[1 - J_0(u)]$
8.89	$(1+t^2)^{-\frac{\nu}{2}} \sin(\nu \operatorname{arctg} t)$, $\operatorname{Re} \nu < 0$	$\frac{\pi}{2}[\Gamma(\nu)]^{-1} u^{\nu-1} e^{-u}$
8.90	$t^{\nu}(1+t^2)^{\frac{\nu}{2}} \sin(\nu \operatorname{arcctg} t)$, $-1 < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$	$\pi^{-\frac{1}{2}} \sin(\pi\nu)\, \Gamma(\nu+1)\, u^{-\nu-\frac{1}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right) K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)$
8.91	$t^{\nu}(1+t^2)^{\frac{\nu}{2}} \cos(\nu \operatorname{arcctg} t)$, $-1 < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2} \Gamma(\nu+1)\, u^{-\nu-\frac{1}{2}} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{u}{2}\right) I_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right) I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
8.92	$\operatorname{arctg}[at(b^2+t^2)^{-1}]$	$\frac{\pi}{u} e^{-u\left(b^2+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sh}\left(\frac{au}{2}\right)$

8.93	$\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{t}\right)^{n}$, $n=1, 3, 5, \ldots$	$\frac{\pi}{2u}\left\{1+\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m} e^{-au\sin\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]}\times\right.$ $\left.\times\cos\left[au\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]\right)$
8.94	$\begin{cases}(a^{2}-t^{2})^{-\frac{1}{2}}\arcsin\left(\frac{t}{a}\right) \text{ pour } 0<t<a,\\ (t^{2}-a^{2})^{-\frac{1}{2}}\ln\left[\frac{t-(t^{2}-a^{2})^{\frac{1}{2}}}{a}\right] \text{ pour } t>a\end{cases}$	$\frac{\pi^{2}}{4}Y_{0}(au)$
8.95	$\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$	$\frac{\pi}{2u}\{1-[1-C(a^{2}u)-S(a^{2}u)]\cos(a^{2}u)-$ $-[C(a^{2}u)-S(a^{2}u)]\sin(a^{2}u)\}$
8.96	$t^{-2}\operatorname{arctg}(at)$	$\frac{\pi}{2}\left[a-u\operatorname{Ei}\left(-\frac{u}{a}\right)-e^{-\frac{u}{a}}\right]$

§ 6. Fonctions logarithmiques

8.97	$\begin{cases}\ln t \text{ pour } 0<t<1,\\ 0 \text{ pour } t>1\end{cases}$	$\frac{1}{u}[\operatorname{Ci}(u)-C-\ln u]$
8.98	$\begin{cases}\ln(a-t) \text{ pour } 0<t<a,\\ 0 \text{ pour } t>a\end{cases}$	$\frac{1}{u}\{\ln a-\sin(au)\operatorname{Si}(au)-\cos(au)[\operatorname{Ci}(au)-C-\ln u]\}$
8.99	$\begin{cases}\ln(a-t) \text{ pour } 0<t<b,\\ 0 \text{ pour } t>b\end{cases}$	$\frac{1}{u}\{\ln a-\cos(bu)\ln(a-b)+\cos(au)[\operatorname{Ci}(au-bu)-$ $-\operatorname{Ci}(au)]+\sin(au)[\operatorname{Si}(au-bu)-\operatorname{Si}(au)]\}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int\limits_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.100	$t^{\nu-1}\ln t,\ -1<\mathrm{Re}\,\nu<1$	$\frac{\pi}{2u^\nu}[\Gamma(1-\nu)]^{-1}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\left[\psi(\nu)-\ln u+\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\right]$
8.101	$t^{\nu-1}e^{-at}\ln t,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\Gamma(\nu)(a^2+u^2)^{-\frac{\nu}{2}}\left\{\cos\left[\nu\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)\right]\times\right.$ $\times\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)+\sin\left[\nu\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)\right]\times$ $\left.\times\left[\psi(\nu)-\frac{1}{2}\ln(a^2+u^2)\right]\right\}$
8.102	$t^{-1}e^{-\frac{a^2}{4t}}\ln t$	$i\ln\left(\frac{2\sqrt{u}}{a}\right)[K_0(a\sqrt{u}e^{-i\frac{\pi}{4}})-K_0(a\sqrt{u}e^{i\frac{\pi}{4}})]+$ $+\frac{\pi}{4}[K_0(a\sqrt{u}e^{i\frac{\pi}{4}})+K_0(a\sqrt{u}e^{-i\frac{\pi}{4}})]$
8.103	$\ln(1+e^{-at})$	$\frac{1}{u}[\ln 2-\frac{1}{4}\psi\left(1+i\frac{u}{2a}\right)-\frac{1}{4}\psi\left(1-i\frac{u}{2a}\right)+$ $+\frac{1}{4}\psi\left(\frac{1}{2}+i\frac{u}{2a}\right)+\frac{1}{4}\psi\left(\frac{1}{2}-i\frac{u}{2a}\right)]$
8.104	$\ln(1-e^{-at})$	$-\frac{1}{u}\left[C+\frac{1}{2}\psi\left(1+i\frac{u}{a}\right)+\frac{1}{2}\psi\left(1-i\frac{u}{a}\right)\right]$

§ 7. Fonctions hyperboliques

8.105	$\operatorname{sch}(at)$	$-\frac{\pi}{2a}\operatorname{th}\left(\frac{\pi u}{2a}\right)-\frac{i}{2a}\left[\psi\left(\frac{1}{4}+i\frac{u}{4a}\right)-\psi\left(\frac{1}{4}-i\frac{u}{4a}\right)\right]$
8.106	$\operatorname{csch}(at)$	$\frac{\pi}{2a}\operatorname{th}\left(\frac{\pi u}{2a}\right)$
8.107	$t^{-1}\operatorname{th}(at)$	$\frac{\pi}{2}-i\ln\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{u}{4a}\right)\Gamma\left(1-i\frac{u}{4a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{u}{4a}\right)\Gamma\left(1+\frac{u}{4a}\right)}\right]$
8.108	$\frac{\operatorname{ch}(at)}{\operatorname{sh}(bt)},\ a<b$	$\frac{\pi}{2b}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi u}{b}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{b}\right)+\cos\left(\frac{\pi a}{b}\right)}$
8.109	$\frac{\operatorname{sh}(at)}{\operatorname{ch}(bt)},\ a<b$	$\frac{\pi}{b}\sin\left(\frac{\pi a}{2b}\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi u}{2b}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{b}\right)+\cos\left(\frac{\pi a}{b}\right)}$
8.110	$\frac{\operatorname{ch}(at)}{\operatorname{ch}(bt)},\ a<b$	$\frac{i}{4b}\left\{\psi\left(\frac{3}{4}+\frac{a+iu}{4b}\right)-\psi\left(\frac{3}{4}+\frac{a-iu}{4b}\right)+\right.$ $+\psi\left(\frac{3}{4}-\frac{a-iu}{4b}\right)-\psi\left(\frac{3}{4}-\frac{a+iu}{4b}\right)-$ $\left.-2\pi i\operatorname{sh}\left(\frac{\pi u}{b}\right)\left[\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{b}\right)+\cos\left(\frac{\pi a}{b}\right)\right]^{-1}\right\}$
8.111	$\frac{\operatorname{sh}(at)}{\operatorname{sh}(bt)},\ a<b$	$\frac{\pi}{2b}\operatorname{sh}\left(\frac{\pi u}{b}\right)\left[\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{b}\right)+\cos\left(\frac{\pi a}{b}\right)\right]^{-1}+$ $+\frac{i}{2b}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{a+iu}{2b}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{a-iu}{2b}\right)\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.112	$\frac{\operatorname{csch}(\pi t)}{m^2+t^2}$, $m=1, 2, 3,\ldots$	$(-1)^m \frac{uv^m}{2m}+\frac{1}{2m}\sum_{n=1}^{m-1}(-1)^n v^n (m-n)^{-1}+$ $+(-1)^m \frac{1}{2m} v^m \ln(1+v)+\frac{1}{2m!}\frac{d^{m-1}}{dv^{m-1}}\left[\frac{(1+v)^{m-1}}{v}\ln(1+v)\right]$ $(v=e^{-u})$
8.113	$e^{-at}\operatorname{csch}(bt)$, $a>b$	$-\frac{i}{2b}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{a+iu}{2b}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{a-iu}{2b}\right)\right]$
8.114	$e^{-at}\operatorname{csch}(at)$	$\frac{\pi}{2a}\operatorname{cth}\left(\frac{\pi u}{2a}\right)-\frac{1}{u}$
8.115	$[\operatorname{sh}(at)]^{-\nu}$, $0<\operatorname{Re}\nu<2$	$\frac{2^\nu \pi}{a}\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\Gamma(1-\nu)\times$ $\times\left[\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}+i\frac{u}{2a}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}-i\frac{u}{2a}\right)\right]^{-1}\times$ $\times\operatorname{sh}\left(\frac{\pi u}{2a}\right)\left[\operatorname{ch}\left(\frac{\pi u}{2a}\right)-\cos(\pi\nu)\right]^{-1}$
8.116	$e^{-at}[\operatorname{csch}(bt)]^\nu$, $\operatorname{Re}\nu>-2$, $-b\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}a<b\operatorname{Re}\nu$	$-\frac{i}{b}2^{-\nu-2}\Gamma(1+\nu)\left[\frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}+\frac{a-iu}{2b}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1+\frac{a-iu}{2b}\right)}-\right.$

		$-\dfrac{\Gamma\left(-\dfrac{\nu}{2}+\dfrac{a+iu}{2b}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}+1+\dfrac{a+iu}{2b}\right)}\Bigg]$
8.117	$e^{-a \operatorname{sh} t}$	$uS_{-1,\ iu}(a)$
8.118	$e^{-a \operatorname{ch} t}$	$\operatorname{csch}(\pi u)\left[\int_0^{\pi} e^{a\cos\xi}\operatorname{ch}(u\xi)\,d\xi-\frac{\pi}{2}I_{iu}(a)-\frac{\pi}{2}I_{-iu}(a)\right]$
8.119	$e^{-a \operatorname{ch} t}\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}u}{2a}W_{-\frac{1}{2},\ i\frac{u}{2}}(2a)$
8.120	$e^{-a \operatorname{ch} t}\operatorname{sh} t$	$\frac{u}{a}K_{iu}(a)$
8.121	$e^{-a \operatorname{ch} t}(\operatorname{sh} t)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} i\sqrt{a}\left[J_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-iu\right)}\left(\frac{a}{2}\right)Y_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iu\right)}\left(\frac{a}{2}\right)-\right.$
		$-J_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iu\right)}\left(\frac{a}{2}\right)Y_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-iu\right)}\left(\frac{a}{2}\right)-$
		$-J_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iu\right)}\left(\frac{a}{2}\right)Y_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-iu\right)}\left(\frac{a}{2}\right)+$
		$\left.+J_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-iu\right)}\left(\frac{a}{2}\right)Y_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iu\right)}\left(\frac{a}{2}\right)\right]$

§ 8. Polynômes orthogonaux

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.122	$\begin{cases} P_n(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{(1-n)(2+n)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{n}{2}\right)}\,\frac{1}{\sqrt{u}}\,s_{\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}(u)$
8.123	$\begin{cases} P_{2n+1}(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$(-1)^n\left(\frac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}} J_{2n+\frac{3}{2}}(u)$
8.124	$\begin{cases} t^{\lambda-1}P_n(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1, \\ & \mathrm{Re}(\lambda+n)>-1 \end{cases}$	$\sqrt{\pi}\,2^{-\lambda-1}\,\Gamma(1+\lambda)\times$ $\times\left[\Gamma\left(1+\frac{\lambda-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+3\lambda+3n}{2}\right)\right]^{-1}u\times$ $\times\,{}_2F_3\left(\frac{1+\lambda}{2},\ 1+\frac{\lambda}{2};\ \frac{3}{2},\ 1+\frac{\lambda-\pi}{2},\ \frac{3+\lambda+n}{2};\ -\frac{u^2}{4}\right)$
8.125	$\begin{cases} P_n(1-2t^2) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}\left[J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)\right]^2$
8.126	$\begin{cases} (a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}T_{2n+1}\left(\frac{t}{a}\right) & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a \end{cases}$	$(-1)^n\frac{\pi}{2}J_{2n+1}(au)$
8.127	$\begin{cases} t^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}T_n(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{u}{2}\right) J_{-\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{u}{2}\right)$

8.128	$\begin{cases} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos [a (1-t^2)^{\frac{1}{2}}]\, T_{2n+1}(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$(-1)^n \frac{\pi}{2} T_{2n+1} [u (a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}]\, J_{2n+1} [(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$
8.129	$T_{2n+1} [t (a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}]\, J_{2n+1} [(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$	$\begin{cases} (-1)^n (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \cos [a (1-u^2)^{\frac{1}{2}}]\, T_{2n+1}(u) & \text{pour } 0<u<1, \\ 0 & \text{pour } u>1 \end{cases}$
8.130	$\begin{cases} \sin [a (1-t^2)^{\frac{1}{2}}]\, U_{2n+1}(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$(-1)^n \frac{\pi a}{2} (a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}} U_{2n+1} [u (a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}] \times$ $\times J_{2n+2} [(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$
8.131	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} U_{2n+1} [t (a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}] \times$ $\times J_{2n+2} [(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$	$\begin{cases} \frac{(-1)^n}{a} \sin [a (1-u^2)^{\frac{1}{2}}]\, U_{2n+1}(u) & \text{pour } 0<u<1, \\ 0 & \text{pour } u>1 \end{cases}$
8.132	$\begin{cases} t (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \sin [a (1-t^2)^{\frac{1}{2}}] \times \\ \times U_{2n+1} [1-t^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$(-1)^n \frac{\pi u}{2} (a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}} U_{2n+1} [a (a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}] \times$ $\times J_{2n+2} [(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$
8.133	$\begin{cases} t (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos [a (1-t^2)^{\frac{1}{2}}] \times \\ \times U_{2n} [(1-t^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$(-1)^n \frac{\pi u}{2} (a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}} U_{2n} [a (a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}] \times$ $\times J_{2n+1} [(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$

Suite

nº	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.134	$t(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} U_{2n}[a(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}]\times$ $\times J_{2n+1}[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$	$\begin{cases}(-1)^n b^{-\frac{1}{4}} u(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\cos[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]\times \\ \times U_{2n}\left[\left(1-\frac{u^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \text{ pour } 0<u<b, \\ 0 \qquad \text{pour } u>b\end{cases}$
8.135	$t(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} U_{2n+1}[a(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}]\times$ $\times J_{2n+2}[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$	$\begin{cases}(-1)^n b^{-\frac{1}{4}} u(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\sin[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]\times \\ \times U_{2n+1}\left[\left(1-\frac{u^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \text{ pour } 0<u<b, \\ 0 \qquad \text{pour } u>b\end{cases}$
8.136	$\begin{cases}(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}+\nu} C_{2n+1}^{\nu}\left(\frac{t}{a}\right) \\ \qquad \text{pour } 0<t<a, \\ 0 \qquad \text{pour } t>a\end{cases}$	$\frac{(-1)^n \pi a^{\nu}}{(2u)^{\nu}} \frac{\Gamma(2n+2\nu+1)}{(2n+1)!\,\Gamma(\nu)} J_{\nu+2n+1}(au)$
8.137	$\begin{cases}(1-t^2)^{\nu} P_{2n+1}^{(\nu,\nu)}(t) \text{ pour } 0<t<1, \\ 0 \qquad \text{pour } t>1,\end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$(-1)^n \pi^{\frac{1}{2}} 2^{\nu-\frac{1}{2}}[(2n+1)!]^{-1}\times$ $\times\Gamma(2n+\nu+2)\,u^{-\nu-\frac{1}{2}} J_{\nu+2n+\frac{3}{2}}(u)$

8.138	$\begin{cases} [(1-t)^{\nu}(1+t)^{\mu}-(1+t)^{\nu}(1-t)^{\mu}]\times \\ \times P_{2n}^{(\nu,\,\mu)}(t) \text{ pour } 0<t<1, \\ 0 \qquad \text{pour} \quad t>1, \end{cases}$ $\operatorname{Re}(\nu,\,\mu)>-1$	$\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+\nu+\mu}}{(2n)!}B(2n+\nu+1,\,2n+\mu+1)\times$ $\times\, iu^{2n}[e^{iu}\,{}_1F_1(2n+\mu+1;\ 4n+\nu+\mu+2;\ -2iu)-$ $-e^{-iu}\,{}_1F_1(2n+\mu+1;\ 4n+\nu+\mu+2;\ 2iu)]$
8.139	$\begin{cases} [(1-t)^{\nu}(1+t)^{\mu}+(1+t)^{\nu}(1-t)^{\mu}\times \\ \times P_{2n+1}^{(\nu,\,\mu)}(t) \text{ pour } 0<t<1, \\ 0 \qquad \text{pour} \quad t>1, \end{cases}$ $\operatorname{Re}(\nu,\,\mu)>-1$	$\frac{(-1)^{n+1}2^{\nu+\mu+2n+1}}{(2n+1)!}u^{2n+1}B(\nu+2n+2,\,\mu+2n+2)\times$ $\times[e^{iu}\,{}_1F_1(\nu+2n+2;\ \nu+\mu+4n+4;\ -2iu)+e^{-iu}\times$ $\times\,{}_1F_1(\nu+2n+2;\ \nu+\mu+4n+4;\ 2iu)]$
8.140	$e^{-\frac{t^2}{2}}\operatorname{He}_{2n+1}(t\sqrt{2})$	$(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{u^2}{2}}\operatorname{He}_{2n+1}(u\sqrt{2})$
8.141	$e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\operatorname{He}_{2n+1}(at)$	$\frac{(-1)^n}{a}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)^{2n+1}e^{-\frac{u^2}{2a^2}}$
8.142	$e^{-\frac{t^2}{2a}}\operatorname{He}_{2n+1}\left[t\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$	$(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}a^{n+1}(1-a)^{-n-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}au^2}\operatorname{He}_{2n+1}(u)$
8.143	$e^{-\frac{t^2}{2}}\operatorname{He}_n(t)\operatorname{He}_{n+2m+1}(t)$	$(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}n!\,u^{2m}e^{-\frac{u^2}{2}}L_n^{(2m+1)}(u^2)$
8.144	$t^{2n+1}e^{-\frac{t^2}{2}}L_n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{t^2}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}u^{2n+1}e^{-\frac{u^2}{2}}L_n^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
8.145	$t^{2n}e^{-\frac{t^2}{2}}L_n^{(2m+1)}(t^2)$	$(-1)^m\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(n!)^{-1}e^{-\frac{u^2}{2}}\operatorname{He}_n(u)\operatorname{He}_{n+2m+1}(u)$

Suite

nº	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.146	$e^{-\frac{t^2}{2}} L_n\left(\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{He}_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} L_n\left(\frac{u^2}{2}\right) \mathrm{He}_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right)$
8.147	$te^{-\frac{t^2}{2}}\left[L_n^{\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)\right]^2$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} ue^{-\frac{u^2}{2}}\left[L_n^{\frac{1}{4}}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]^2$
8.148	$te^{-\frac{t^2}{2}} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{t^2}{2}\right) L_n^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\left(\frac{t^2}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} ue^{-\frac{u^2}{2}} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{u^2}{2}\right) L_n^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\left(\frac{u^2}{2}\right)$

§ 9. Fonctions gamma et fonctions associées

8.149	$\frac{1}{\Gamma(a+t)\Gamma(b-t)}-\frac{1}{\Gamma(a-t)\Gamma(b+t)}$	$\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(a+b-1)}\left[2\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{a+b-2}\sin\left[\frac{u(b-a)}{2}\right] & \text{pour } 0\leqslant u<\pi,\\ 0 & \text{pour } u>\pi\end{cases}$
8.150	$\psi(a+it)-\psi(a-it)$	$i\pi e^{-au}(1-e^{-u})^{-1}$
8.151	$\psi\left(\frac{1}{4}+at\right)-\psi\left(\frac{3}{4}+at\right)$	$\frac{1}{4a}\left[\psi\left(\frac{1}{4}+\frac{u}{8\pi a}\right)-\psi\left(\frac{3}{4}+\frac{u}{8\pi a}\right)\right]$
8.152	$\frac{1}{t}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+iat\right)+\psi\left(\frac{1}{2}-iat\right)\right]$	$-\pi\left\{C+\ln\left[4\,\mathrm{th}\left(\frac{u}{2a}\right)\right]\right\}$
8.153	$\frac{1}{t}\psi(1+t)$	$\pi\ln\Gamma\left(1+\frac{u}{2\pi}\right)-\frac{u}{2}\left(\ln\frac{u}{2\pi}-1\right)-\frac{\pi}{2}(C+\ln u)$

§ 10. Fonctions intégrales

8.154	$\mathrm{Ei}\,(-at)$	$-\frac{1}{2u}\ln\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)$
8.155	$e^{at}\,\mathrm{Ei}\,(-at)$	$\frac{1}{a^2+u^2}\left[u\ln\left(\frac{a}{u}\right)-\frac{\pi a}{2}\right]$
8.156	$e^{-at}\,\overline{\mathrm{Ei}}\,(bt),\ a>b$	$\frac{1}{a^2+u^2}\left\{a\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{a-b}\right)-\frac{1}{2}u\ln\left(\frac{u^2+(a-b)^2}{b^2}\right)\right\}$
8.157	$e^{-a\,\mathrm{sh}\,t}\,\overline{\mathrm{Ei}}\,(a\,\mathrm{sh}\,t)-e^{a\,\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{Ei}\,(-a\,\mathrm{sh}\,t)$	$\pi\,\mathrm{th}\left(\frac{\pi u}{2}\right)S_{0,\,iu}\,(a)$
8.158	$e^{-bt}\,\mathrm{si}\,(at)$	$\frac{1}{2(b^2+u^2)}\left\{u\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u+a}{b}\right)-u\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u-a}{b}\right)+\right.$ $\left.+\frac{b}{2}\ln\left[\frac{b^2+(u+a)^2}{b^2+(u-a)^2}\right]-\pi u\right\}$
8.159	$\mathrm{Ci}\,(at)$	$-\frac{1}{2u}\ln\left\lvert 1-\frac{u^2}{a^2}\right\rvert$
8.160	$\frac{\mathrm{Ci}\,(bt)}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,(au)\,\mathrm{Ei}\,(-ab)$ pour $0<u<b$, $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,(au)\,\mathrm{Ei}\,(-au)+\frac{\pi}{4}e^{-au}\,[\mathrm{Ei}\,(-au)+\overline{\mathrm{Ei}}\,(au)-$ $-\mathrm{Ei}\,(-ab)-\overline{\mathrm{Ei}}\,(ab)]$ pour $u>b$
8.161	$\mathrm{si}\,(at^2)$	$-\frac{\pi}{u}\left\{\left[C\left(\frac{u^2}{4a}\right)\right]^2+\left[S\left(\frac{u^2}{4a}\right)\right]^2\right\}$
8.162	$\mathrm{si}\left(\frac{a}{t}\right)$	$-\frac{\pi}{2u}J_0\,[2\,(au)^{\frac{1}{2}}]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t) \sin(ut)\, dt$
8.163	$\frac{1}{t}\left[\cos\left(\frac{a}{t}\right) \mathrm{Ci}\left(\frac{a}{t}\right) + \mathrm{si}\left(\frac{a}{t}\right) \sin\left(\frac{a}{t}\right)\right]$	$-\pi K_0 [2 (au)^{\frac{1}{2}}]$
8.164	$\frac{1}{t^2}\left[\mathrm{Ci}\left(\frac{a}{t}\right) \sin\left(\frac{a}{t}\right) - \mathrm{si}\left(\frac{a}{t}\right) \cos\left(\frac{a}{t}\right)\right]$	$\frac{\pi}{2a}\{1 - 2 (au)^{\frac{1}{2}} K_1 [2 (au)^{\frac{1}{2}}]\}$
8.165	$\frac{1}{2} - S(at)$	$\frac{1}{2u}\left\{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (a^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} [a + (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\right\}$ pour $0 < u < c$, $\frac{1}{2u}\left\{1 + \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (u^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} [u - (u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\right\}$ pour $u > a$
8.166	$\frac{1}{2} - C(at)$	$\frac{1}{2u}\left\{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (a^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} [a + (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\right\}$ pour $0 < u < a$, $\frac{1}{2u}\left\{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (u^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} [u + (u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\right\}$ pour $u > a$

8.167	$\frac{1}{t}\{[C(at^2)]^2+[S(at^2)]^2\}$	$-\frac{1}{2}\,\mathrm{si}\left(\frac{u^2}{4a}\right)$
8.168	$\frac{1}{2}-S(a\sqrt{t})$	$\frac{1}{2u}+\frac{a}{4}\pi^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{a^2}{8u}-\frac{7\pi}{8}\right)J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{8u}\right)$
8.169	$\frac{1}{2}-C(a\sqrt{t})$	$\frac{1}{2u}+\frac{a}{4}\pi^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{a^2}{8u}-\frac{5\pi}{8}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{8u}\right)$

§ 11. Fonctions cylindriques

8.170	$J_{2n+1}(at),\ n=0,1,2,\ldots$	$\begin{cases}(-1)^n(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}T_{2n+1}\left(\frac{u}{a}\right) & \text{pour } 0<u<a,\\ 0 & \text{pour } u>a\end{cases}$
8.171	$J_\nu(at),\ \mathrm{Re}\,\nu>-2$	$\begin{cases}(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\left[\nu\arcsin\left(\frac{u}{a}\right)\right] & \text{pour } 0<u<a,\\ a^\nu\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}[u+(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu} & \text{pour } u>a\end{cases}$
8.172	$t^\nu J_\nu(at),\ -1<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{1}{2}$	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<u<a,\\ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(2a)^\nu(u^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } u>a\end{cases}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.173	$t^{\nu+1}J_\nu(at),\ -\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}$	$\begin{cases} -\pi^{-\frac{1}{2}}2^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)a^\nu u(a^2-u^2)^{-\nu-\frac{3}{2}} & \text{pour } 0<u<a, \\ -\pi^{-\frac{1}{2}}2^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)a^\nu \sin(\pi\nu)\,u(u^2-a^2)^{-\nu-\frac{3}{2}} & \text{pour } u>a \end{cases}$
8.174	$t^{1-\nu}J_\nu(at),\ \operatorname{Re}\nu>\frac{1}{2}$	$\begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{a^\nu}2^{1-\nu}\frac{1}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}u(a^2-u^2)^{\nu-\frac{3}{2}} & \text{pour } 0<u<a, \\ 0 & \text{pour } u>a \end{cases}$
8.175	$t^{-\nu}J_{\nu+2n-1}(at),\ n=0,1,2,\ldots,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\begin{cases} (-1)^n 2^{\nu-1}a^{-\nu}\frac{(2n+1)!\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(2n+2\nu+1)}(a^2-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}C_{2n+1}^{\nu}\left(\frac{u}{a}\right) & \text{pour } 0<u<a, \\ 0 & \text{pour } u>a \end{cases}$
8.176	$t^{\mu-1}J_\nu(at),\ \operatorname{Re}(\mu+\nu)>-1,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{3}{2}$	$2^\mu a^{-\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}u\,{}_2F_1\times$ $\times\left(\frac{\mu+\nu+1}{2},\ \frac{\mu-\nu+1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{u^2}{a^2}\right)$ pour $0<u<a$,

		$\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu} u^{-\nu-\mu} \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(1+\nu)} \sin\left[\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right] \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu}{2}; \nu+1; \frac{a^2}{u^2}\right)$ pour $u > a$
8.177	$t^{-1}[(t+b)^{-\nu} J_{\nu+2n}(t+b) +$ $+(t-b)^{-\nu} J_{\nu+2n}(t-b)]$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}$; $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{\pi}{b} J_{\nu+2n}(b)$, $u \geqslant 1$
8.178	$t^{\frac{1}{2}}(b^2+t^2)^{-1} J_{2n+\frac{1}{2}}(at)$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$(-1)^n \operatorname{sh}(bu)\, K_{2n+\frac{1}{2}}(ab)$, $0 < u < a$
8.179	$(b^2+t^2)^{-1}[J_{\nu}(at)+J_{-\nu}(at)]$, $-2 < \operatorname{Re}\nu < 2$	$\frac{2}{b}\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\operatorname{sh}(bu)\, K_{\nu}(ab)$, $0 < u < a$
8.180	$t^{\nu}(b^2+t^2)^{-1} J_{\nu}(at)$, $-1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{5}{2}$	$b^{\nu-1}\operatorname{sh}(bu)\, K_{\nu}(ab)$, $0 < u < a$
8.181	$t^{1-\nu}(b^2+t^2)^{-1} J_{\nu}(at)$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}$	$\frac{\pi}{2\cdot b^{\nu}} e^{-bu} I_{\nu}(ab)$, $u > a$
8.182	$t^{\nu+2n}(b^2+t^2)^{-1} J_{\nu}(at)$, $\operatorname{Re}(\nu+n) > -1$ $\operatorname{Re}(\nu+2n) < \frac{5}{2}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$(-1)^n b^{\nu+2n-1}\operatorname{sh}(bu)\, K_{\nu}(ab)$, $0 < u < b$
8.183	$t^{2n+1-\nu}(b^2+t^2)^{-1} J_{\nu}(at)$, $\operatorname{Re}\nu > 2n-\frac{3}{2}$; $n=-1, 0, 1, \ldots$	$(-1)^n \frac{\pi}{2} b^{2n-\nu} e^{-bu} I_{\nu}(ab)$, $u > a$

Suite

nº	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t) \sin(ut)\, dt$
8.184	$t^\nu \cos t J_\nu(t),\ -1 < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$	$\begin{cases} \dfrac{2^{\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(u^2+2u)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0 < u < 2, \\ \dfrac{2^{\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\left[(u^2+2u)^{-\nu-\frac{1}{2}} + (u^2-2u)^{-\nu-\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } u > 2 \end{cases}$
8.185	$t^{1-\nu} \cos t J_\nu(t),\ \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$	$\begin{cases} \dfrac{2^{-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}(u-1)(2u-u^2)^{\nu-\frac{3}{2}} & \text{pour } 0 < u < 2, \\ 0 & \text{pour } u > 2 \end{cases}$
8.186	$t^{-\nu} \sin t J_\nu(t),\ \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$	$\begin{cases} \dfrac{2^{-\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}(2u-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0 < u < 2, \\ 0 & \text{pour } u > 2 \end{cases}$

8.187	$J_{n+\frac{1}{2}}(at)\, J_{n+\frac{1}{2}}(bt)$, $n=-1, 0, 1, \ldots$	$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{ab}} P_n\left(\dfrac{a^2+b^2-u^2}{2ab}\right) & \text{pour } 0<u<a+b, \\ 0 & \text{pour } u>a+b \end{cases}$
8.188	$t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{4}-\nu}(at)\, J_{\frac{1}{4}+\nu}(at)$	$\begin{cases} \left(\dfrac{\pi u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} (4a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} \cos\left[2\nu \arccos\left(\dfrac{u}{2a}\right)\right] & \text{pour } 0<u<2a, \\ 0 & \text{pour } u>2a \end{cases}$
8.189	$J_\nu(at)\, J_\nu(bt)$, $b \geqslant a$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<u<b-a, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{ab}} P_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{a^2+b^2-u^2}{2ab}\right) & \text{pour } b-a<u<b+a, \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{ab}} \cos(\pi\nu)\, \mathfrak{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{u^2-a^2-b^2}{2ab}\right) & \text{pour } u>a+b \end{cases}$
8.190	$t^{-\frac{1}{2}} [J_\nu(at)]^2$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{4}$	$\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{2\nu}\, \Gamma\left(\dfrac{3}{4}+\nu\right)}{[\Gamma(\nu+1)]^2\, \Gamma\left(\dfrac{3}{4}-\nu\right)} u^{-\frac{1}{2}-2\nu} \times$ $\times \left\{ {}_2F_1\left(\dfrac{1}{4}+\nu, \dfrac{3}{4}+\nu; \nu+1; \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{4a^2}{u^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right) \right\}^2$ $(u>2a)$

Suite

nº	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.191	$[t^\nu J_\nu(at)]^2, \quad -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\begin{cases} \dfrac{2^{2\nu}}{\pi}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-2\nu\right)} e^{i\pi\nu}(2a)^{\nu-\frac{1}{2}}u^{-\nu-\frac{1}{2}}(4a^2-u^2)^{-\nu}\times \\ \times\,\mathfrak{Q}^{-\nu}_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{u^2+4a^2}{4au}\right) \text{ pour } 0<u<2a, \\ 2^{2\nu}\pi^{-\frac{3}{2}}\cos(2\pi\nu)\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)e^{-i\pi\nu}(2a)^{\nu-\frac{1}{2}}u^{-\nu-\frac{1}{2}}\times \\ \times(u^2-4a^2)^{-\nu}\,\mathfrak{Q}^{\nu}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{u^2+4a^2}{4au}\right) \text{ pour } u>2a \end{cases}$
8.192	$t^{\nu-\mu}J_\nu(at)J_\mu(bt), \quad -1<\operatorname{Re}\nu<1+\operatorname{Re}\mu,$ $a>b$	$0 \quad (0<u<a-b)$
8.193	$t^{\nu-\mu-2}J_\nu(at)J_\mu(bt), \quad a>b,$ $0<\operatorname{Re}\nu<3+\operatorname{Re}\mu$	$\dfrac{2^{\nu-\mu-1}b^\mu}{a^\nu\Gamma(1+\mu)}\Gamma(\nu)\,u \quad (0<u<a-b)$
8.194	$t^{-1}\{[J_{n+\frac{1}{2}}(t-b)]^2-[J_{n+\frac{1}{2}}(t+b)]^2\},$ $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$	$\pi[J_{n+\frac{1}{2}}(b)]^2 \ (2\leqslant u)$
8.195	$t^{-1}\{(t-b)^{-2\nu}[J_{\nu+n}(t-b)]^2+$ $+(t+b)^{-2\nu}[J_{\nu+n}(t+b)]^2\}, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots;$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\pi b^{-2\nu}[J_{\nu+n}(b)]^2 \quad (u\geqslant 2)$

8.196	$Y_\nu(at)$, $-2<\operatorname{Re}\nu<2$	$\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\left[\nu\arcsin\left(\frac{u}{a}\right)\right] \\ \text{pour } 0<u<a, \\ \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\{a^{-\nu}\cos(\nu\pi)[u-(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu- \\ -a^\nu[u-(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu}\} \text{ pour } u>a \end{cases}$
8.197	$t^{-1}Y_\nu(at)$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\begin{cases} -\frac{1}{\nu}\operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\sin\left[\nu\arcsin\left(\frac{u}{a}\right)\right] \\ \text{pour } 0<u<a, \\ \frac{1}{2\nu}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\{a^{-\nu}\cos(\nu\pi)[u-(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu-a^\nu[u- \\ -(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu}\} \text{ pour } u>a \end{cases}$
8.198	$t^{1+\nu}Y_\nu(at)$, $-\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}$	$\begin{cases} 0 \qquad \text{pour } 0<u<a, \\ \dfrac{\pi^{\frac{1}{2}}2^{\nu+1}a^\nu}{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}u(u^2-a^2)^{-\nu-\frac{3}{2}} \text{ pour } u>a \end{cases}$
8.199	$t^{1-\nu}Y_\nu(at)$, $\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$	$\begin{cases} 2(2a)^{-\nu}\pi^{-\frac{1}{2}}\sin(\pi\nu)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)u(a^2-u^2)^{\nu-\frac{3}{2}} \\ \text{pour } 0<u<a, \\ -2\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)(2a)^{-\nu}u(u^2-a^2)^{\nu-\frac{3}{2}} \\ \text{pour } u>a \end{cases}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.200	$J_\nu(at)\cos\left(at-\frac{\nu\pi}{2}\right)+$ $+Y_\nu(at)\sin\left(at-\frac{\nu\pi}{2}\right)$, $-2<\operatorname{Re}\nu<2$	$\frac{1}{2}(2a)^{-\nu}u^{-\frac{1}{2}}(u+2a)^{-\frac{1}{2}}\{[(u+2a)^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{1}{2}}]^{2\nu}+$ $+[(u+2a)^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}}]^{2\nu}\}$
8.201	$(b^2+t^2)^{-1}[Y_{-\nu}(at)-Y_\nu(at)]$, $-2<\operatorname{Re}\nu<2$	$\frac{2}{b}\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\operatorname{sh}(bu)\,K_\nu(ab)$ $(0<u<a)$
8.202	$t^{\frac{1}{2}}(b^2+t^2)^{-1}\left\{J_\mu(at)\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\right]-\right.$ $\left.-Y_\mu(at)\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$, $-\frac{5}{2}<\operatorname{Re}\mu<\frac{5}{2}$	$b^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sh}(bu)\,K_\mu(ab)$ $(0<u<a)$
8.203	$J_\nu(at)\,Y_{-\nu}(bt)+Y_\nu(at)\,J_{-\nu}(bt)$, $a>b$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<u<a+b, \\ -\frac{1}{\sqrt{ab}}\mathfrak{P}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{u^2-a^2-b^2}{2ab}\right) & \text{pour } u>a+b \end{cases}$
8.204	$t^{-1}[J_{n+\frac{1}{2}}(t-b)\,Y_{n+\frac{1}{2}}(t-b)+$ $+J_{n+\frac{1}{2}}(t+b)\,Y_{n+\frac{1}{2}}(t+b)]$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$\pi J_{n+\frac{1}{2}}(b)\,Y_{n+\frac{1}{2}}(b)$ $(u\geqslant 2)$

8.205	$t^{1-2\nu} J_\nu(at) Y_\nu(at), \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < \frac{3}{4}$	$\frac{a^{2\nu-1}}{4} \Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\left[\Gamma(2-\nu)\Gamma\left(2\nu-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} u \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{3}{2}-\nu, \frac{3}{2}-2\nu; 2-\nu; \frac{u^2}{4a^2}\right) \quad (0<u<2a)$
8.206	$t^{1-2\nu}\{[J_\nu(at)]^2-[Y_\nu(at)]^2\}, \quad 0<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{4}$	$\frac{a^{2\nu-1}}{2\pi\Gamma(2-\nu)} \sin(2\pi\nu)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-2\nu\right) u \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{3}{2}-\nu, \frac{3}{2}-2\nu; 2-\nu; \frac{u^2}{4a^2}\right) \quad (0<u<2a)$
8.207	$t^{2-2\nu}[J_\nu(at) J_{\nu-1}(at) - Y_\nu(at) Y_{\nu-1}(at)]$, $\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{5}{4}$	$-\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}-2\nu\right)}{2\pi\Gamma(2-\nu)} \sin(2\pi\nu) a^{2\nu-2} u \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{3}{2}-\nu, \frac{5}{2}-2\nu; 2-\nu; \frac{u^2}{4a^2}\right) \quad (0<u<2a)$
8.208	$t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{8}-\nu}(at^2) J_{\frac{1}{8}+\nu}(at^2)$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{3}{2}}\left[e^{i\frac{\pi}{8}} W_{\nu, \frac{1}{8}}\left(\frac{iu^2}{8a}\right) W_{-\nu, \frac{1}{8}}\left(\frac{iu^2}{8a}\right)+\right.$ $\left.+e^{-i\frac{\pi}{8}} W_{\nu, \frac{1}{8}}\left(-\frac{iu^2}{8a}\right) W_{-\nu, \frac{1}{8}}\left(-\frac{iu^2}{8a}\right)\right]$
8.209	$J_0(at^2)$	$\frac{\pi u}{8a} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{u^2}{8a}\right)\left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{u^2}{8a}\right)-Y_{\frac{1}{4}}\left(\frac{u^2}{8a}\right)\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.210	$t^{2\lambda} J_{2\nu}\left(\frac{a}{t}\right)\quad -\frac{5}{4}<\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\nu$	$\pi^{\frac{1}{2}} 4^{\lambda-2\nu} a^{2\nu} \frac{\Gamma(\lambda-\nu+1)}{\Gamma(1+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-\lambda\right)}\times$ $\times u^{2\nu-2\lambda-1}\,{}_0F_3\left(1+2\nu,\ \nu-\lambda,\ \frac{1}{2}+\nu-\lambda;\ \frac{a^2u^2}{16}\right)+$ $+2^{-2\lambda-3} a^{2+2\lambda} \frac{\Gamma(\nu-\lambda-1)}{\Gamma(\nu+\lambda+2)} u\times$ $\times\,{}_0F_3\left(\frac{3}{2},\ 2+\lambda-\nu,\ 2+\lambda+\nu;\ \frac{a^2u^2}{16}\right)$
8.211	$\frac{1}{t}\sin\left(\frac{a}{t}\right) J_\nu\left(\frac{b}{t}\right),\ \operatorname{Re}\nu>-2$	$\frac{\pi}{2} J_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\left[\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) J_\nu(du^{\frac{1}{2}})+\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) Y_\nu(du^{\frac{1}{2}})\right]+$ $+\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) I_\nu(cu^{\frac{1}{2}}) K_\nu(du^{\frac{1}{2}}),\ c=2\left[(a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}\right],$ $d=2\left[(a+b)^{\frac{1}{2}}-(a-b)^{\frac{1}{2}}\right]\ (a>b)$
8.212	$\frac{1}{t} J_\nu\left(\frac{a}{t}\right),\ \operatorname{Re}\nu>-1$	$i\{J_\nu[(2aiu)^{\frac{1}{2}}] K_\nu[(2aiu)^{\frac{1}{2}}]-J_\nu[(-2aiu)^{\frac{1}{2}}] K_\nu[(-2aiu)^{\frac{1}{2}}]\}$
8.213	$\frac{1}{t}\sin\left(\frac{a}{t}\right) J_{2n+1}\left(\frac{b}{t}\right),\ n=0,1,2,\ldots$	$(-1)^n \frac{\pi}{2} J_{2n+1}\{2u^{\frac{1}{2}}[(a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}]\}\times$ $\times J_{2n+1}\{2u^{\frac{1}{2}}[(a+b)^{\frac{1}{2}}-(a-b)^{\frac{1}{2}}]\}$

8.214	$\frac{1}{t}\cos\left(\frac{a}{t}\right) J_\nu\left(\frac{b}{t}\right)$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\frac{\pi}{2} J_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) J_\nu(du^{\frac{1}{2}}) - \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) Y_\nu(du^{\frac{1}{2}})\right] - \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) I_\nu(cu^{\frac{1}{2}}) K_\nu(du^{\frac{1}{2}})$, $c = 2\left[(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}}\right]$, $d = 2\left[(a+b)^{\frac{1}{2}} - (a-b)^{\frac{1}{2}}\right]$ $(a < b)$
8.215	$\frac{1}{t}\cos\left(\frac{a}{t}\right) J_{2n}\left(\frac{b}{t}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$	$(-1)^n \frac{\pi}{2} J_{2n}\{2u^{\frac{1}{2}}[(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}}]\} \times J_{2n}\{2u^{\frac{1}{2}}[(a+b)^{\frac{1}{2}} - (a-b)^{\frac{1}{2}}]\}$
8.216	$t^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{a}{t}\right) J_{2n-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{t}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$	$(-1)^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}} J_{4n-1}[2(2au)^{\frac{1}{2}}]$
8.217	$t^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{a}{t}\right) J_{2n+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{t}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$	$(-1)^n \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}} J_{4n+1}[2(2au)^{\frac{1}{2}}]$
8.218	$\frac{1}{t}\sin\left(\frac{a}{t}\right) Y_\nu\left(\frac{b}{t}\right)$, $-2 < \operatorname{Re}\nu < 2$	$\frac{\pi}{2} Y_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) Y_\nu(du^{\frac{1}{2}}) + \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) J_\nu(du^{\frac{1}{2}})\right] - K_\nu(du^{\frac{1}{2}})\left[\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) I_\nu(cu^{\frac{1}{2}}) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) K_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\right]$, $c = 2\left[(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}}\right]$, $d = 2\left[(a+b)^{\frac{1}{2}} - (a-b)^{\frac{1}{2}}\right]$ $(a > b)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.219	$\frac{1}{t}\cos\left(\frac{a}{t}\right)Y_\nu\left(\frac{b}{t}\right)$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$-\frac{\pi}{2}Y_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)J_\nu(du^{\frac{1}{2}})+\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)Y_\nu(du^{\frac{1}{2}})\right]-$ $-K_\nu(du^{\frac{1}{2}})\left[I_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)+\frac{2}{\pi}K_\nu(cu^{\frac{1}{2}})\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]$, $c=2[(a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}]$, $d=2[(a+b)^{\frac{1}{2}}-(a-b)^{\frac{1}{2}}]$ $(a>b)$
8.220	$J_\nu(a\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}>-4$	$\frac{a}{4u}\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{a^2}{8u}-\frac{\nu\pi}{4}\right)J_{\frac{1}{2}(\nu-1)}\left(\frac{a^2}{8u}\right)-\right.$ $\left.-\sin\left(\frac{a^2}{8u}-\frac{\nu\pi}{4}\right)J_{\frac{1}{2}(\nu+1)}\left(\frac{a^2}{8u}\right)\right]$
8.221	$t^{\frac{\nu}{2}}e^{-at}J_\nu[2(bt)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}\nu>-2$	$b^{\frac{\nu}{2}}(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}e^{-\frac{ab}{a^2+u^2}}\times$ $\times\sin\left[(\nu+1)\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)-\frac{bu}{a^2+u^2}\right]$
8.222	$J_\nu(a\sqrt{t})J_\nu(b\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}\nu>-2$	$\frac{1}{u}\cos\left[\frac{1}{4u}(a^2+u^2)-\frac{\nu\pi}{2}\right]J_\nu\left(\frac{ab}{2u}\right)$
8.223	$J_\nu(at)J_{2\nu}(b\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\left[\frac{b^2u}{4(a^2-u^2)}\right]J_\nu\left[\frac{ab^2}{4(a^2-u^2)}\right]$ pour $0<u<a$, $(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\left[\frac{b^2u}{4(u^2-a^2)}-\pi\nu\right]J_\nu\left[\frac{ab^2}{4(u^2-a^2)}\right]$ pour $u>a$

8.224	$\begin{cases} (a-t)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[b(a-t)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{1}{u}\left(\frac{b}{2u}\right)^\nu U_{\nu+2}(2au,\ b\sqrt{a})$
8.225	$\begin{cases} [t(a-t)]^{-\frac{1}{2}} J_\nu\{b[t(a-t)]^{\frac{1}{2}}\} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-3$	$\pi \sin\left(\frac{au}{2}\right) J_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{4}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+u]\right\}\times$ $\times J_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{4}[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-u]\right\}$
8.226	$\begin{cases} t(a^2-t^2)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[b(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a(ab)^\nu u(b^2+u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} J_{\nu+\frac{3}{2}}[a(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$
8.227	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ \left(\frac{t-a}{t+a}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\begin{cases} (b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-a\sqrt{b^2-u^2}} \sin\{\nu \operatorname{arctg}[u(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}]\} \\ \text{pour } 0<u<b, \\ b^\nu(u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}[u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu}\cos\left[\frac{\pi\nu}{2}+a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \text{pour } u>b \end{cases}$
8.228	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ (t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} J_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{\pi}{2} J_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[u-(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\} J_{-\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\}$ $(u>b)$
8.229	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ (t^2-a^2)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<u<b, \\ \left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^\nu(u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} J_{-\nu-\frac{1}{2}}[a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}] \\ \text{pour } u>b \end{cases}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.230	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ t(t^2-a^2)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}$	$\begin{cases} -\left(\frac{2u}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} a(ab)^\nu (b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} K_{\nu+\frac{3}{2}}[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] \\ \text{pour } 0<u<b, \\ \left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a(ab)^\nu (u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} Y_{-\nu-\frac{3}{2}}[a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}] \\ \text{pour } u>b \end{cases}$
8.231	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ (t^2-a^2)^{\frac{\nu}{2}} (t^2+c^2)^{-1} J_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<\frac{5}{2}$	$\frac{(a^2+c^2)^{\frac{\nu}{2}}}{c} \operatorname{sh}(cu) K_\nu[b(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}]$ $(0<u<b)$
8.232	$(1+t)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu[a(1+t)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}\nu>\frac{1}{2}$	$\frac{1}{u}\left(\frac{a}{2u}\right)^\nu V_{-\nu}(2u,\ a)$
8.233	$\left(1+\frac{a}{t}\right)^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu[b(t^2+at)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}\nu>-2$	$\begin{cases} (b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{2}\sqrt{b^2-u^2}} \sin\left\{\nu \operatorname{arctg}[u(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}]-\frac{au}{2}\right\} \\ \text{pour } 0<u<b, \\ b^\nu (u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}} [u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu} \times \\ \times\cos\left[\frac{a}{2}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{au}{2}+\frac{\pi\nu}{2}\right] \text{ pour } u>b \end{cases}$

$t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{4}} \left\{ \frac{a}{2} [(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}} - b] \right\} \times$ $\times Y_{\frac{1}{4}} \left\{ \frac{a}{2} [(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}} + b] \right\}$	$\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} (a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} \sin [b (a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]$ pour $0 < u < a$, $-\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} (u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-b (u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$ pour $u > a$
$(t^2+at)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu [b (t^2+at)^{\frac{1}{2}}]$, $-2 < \mathrm{Re}\, \nu < \frac{1}{2}$	$-\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{ab}{2}\right)^\nu \sin \left(\frac{au}{2}\right) (b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times$ $\times K_{\nu+\frac{1}{2}} \left[\frac{a}{2} (b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\right]$ pour $0 < u < b$, $\frac{1}{2} (a\pi)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{ab}{2}\right)^\nu (u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times$ $\times \left\{ \sin \left(\frac{au}{2} - \nu\pi\right) J_{\nu+\frac{1}{2}} \left[\frac{a}{2} (u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \right.$ $\left. -\cos \left(\frac{au}{2} - \nu\pi\right) Y_{\nu+\frac{1}{2}} \left[\frac{a}{2} (u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right] \right\}$ pour $u > b$
$t (b^2+t^2)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu [a (b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$, $\mathrm{Re}\, \nu < -\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (ab)^\nu bu (a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} Y_{\nu+\frac{3}{2}} [b (a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]$ pour $0 < u < a$, $-\left(\frac{2b}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} b (ab)^\nu \sin (\pi\nu) (u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \times$ $\times K_{\nu+\frac{3}{2}} [a (u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]$ pour $u > a$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.237	$t(b^2+t^2)^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu[a(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}\nu>\frac{1}{2}$	$\begin{cases} \left(\frac{\pi b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^{-\nu} bu(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{3}{2}\right)} J_{\nu-\frac{3}{2}}[b(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0<u<a, \\ 0 & \text{pour } u>a \end{cases}$
8.238	$(a^2+t^2)^{-\frac{\nu}{2}} C_{2n+1}^{\nu}[t(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}]\times$ $\times J_{\nu+2n+1}[(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$\begin{cases} (-1)^n\left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{-\nu}(1-u^2)^{\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\times \\ \times C_{2n+1}^{\nu}(u) J_{\nu-\frac{1}{2}}[a(1-u^2)^{\frac{1}{2}}] \text{ pour } 0<u<1, \\ 0 \quad \text{pour } u>1 \end{cases}$
8.239	$\begin{cases} (1-t^2)^{\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)} C_{2n+1}^{\nu}(t)\times \\ \times J_{\nu-\frac{1}{2}}[a(1-t^2)^{\frac{1}{2}}] \text{ pour } 0<t<1, \\ 0 \quad \text{pour } t>1, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$; $n=0, 1, 2, \ldots$	$(-1)^n\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} a^{\nu}(a^2+u^2)^{-\frac{\nu}{2}} C_{2n+1}^{\nu}[u(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}]\times$ $\times J_{\nu+2n+1}[(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$

8.240	$J_\nu(a\sqrt{t})\,Y_{-\nu}(b\sqrt{t})+$ $+J_{-\nu}(b\sqrt{t})\,Y_\nu(a\sqrt{t}),\ -2<\operatorname{Re}\nu<2$	$\frac{1}{u}\Big[\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{a^2+b^2}{4u}\right)J_\nu\left(\frac{ab}{2u}\right)+$ $+\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{a^2+b^2}{4u}\right)Y_\nu\left(\frac{ab}{2u}\right)\Big]$
8.241	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ \dfrac{(t^2-a^2)^{n+\frac{1}{2}(\nu-1)}}{(c^2+t^2)}Y_\nu[b(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-\frac{1}{2}-n<\operatorname{Re}\nu<\frac{7}{2}-2n;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{(-1)^{n-1}}{c}\operatorname{sh}(cu)\,(a^2+c^2)^{n+\frac{1}{2}(\nu-1)}\,K_\nu[b(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}]$ $(0<u<b)$
8.242	$t\,(a^2+t^2)^{\frac{\nu}{2}}\,Y_\nu[b(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}],\ \operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}$	$\begin{cases} -\left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^\nu\,au\,(b^2-u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\times \\ \times J_{\nu+\frac{3}{2}}[a(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] \text{ pour } 0<u<b, \\ -\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}(ab)^\nu\,au\,(u^2-b^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\times \\ \times K_{\nu+\frac{3}{2}}[a(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}] \text{ pour } u>b \end{cases}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t) \sin(ut)\, dt$
8.243	$t\,(a^2+t^2)^{-\frac{\nu}{2}}\, Y_\nu[b\,(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$, $\mathrm{Re}\,\nu > \frac{1}{2}$	$\begin{cases} \left(\frac{\pi a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (ab)^{-\nu} au\, (b^2-u^2)^{\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{3}{2}\right)} \times \\ \times Y_{\nu-\frac{3}{2}}[a\,(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] \text{ pour } 0 < u < b, \\ -\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} (ab)^{-\nu} au\, (u^2-b^2)^{\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{3}{2}\right)} \times \\ \times K_{\nu-\frac{3}{2}}[a\,(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}] \text{ pour } u > b \end{cases}$
8.244	$\begin{cases} J_\nu(a \sin t) & \text{pour } 0 < t < \pi, \\ 0 & \text{pour } \quad t > \pi \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu > -2$	$\pi \sin\left(\frac{\pi u}{2}\right) J_{\frac{1}{2}(\nu-u)}\left(\frac{a}{2}\right) J_{\frac{1}{2}(\nu+u)}\left(\frac{a}{2}\right)$
8.245	$J_\nu(a \,\mathrm{sh}\, t)$, $\mathrm{Re}\,\nu > -2$	$\frac{i}{2}\left\{ I_{\frac{1}{2}(\nu+iu)}\left(\frac{a}{2}\right) K_{\frac{1}{2}(\nu-iu)}\left(\frac{a}{2}\right) - \right.$ $\left. - I_{\frac{1}{2}(\nu-iu)}\left(\frac{a}{2}\right) K_{\frac{1}{2}(\nu+iu)}\left(\frac{a}{2}\right) \right\}$
8.246	$\sin(\pi t)\, J_{\nu-t}(a)\, J_{\nu+t}(a)$, $\mathrm{Re}\,\nu > -1$	$\begin{cases} \frac{1}{4} J_{2\nu}\left(2a \sin\frac{u}{2}\right) & \text{pour } 0 < u < 2\pi, \\ 0 & \text{pour } \quad u > 2\pi \end{cases}$

8.247	$\dfrac{\mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,(\pi t)}\,[J_{it}(a)-J_{-it}(a)]$	$-i\sin(a\,\mathrm{ch}\,u)\left[C\left(2a\,\mathrm{sh}^2\dfrac{u}{2}\right)+S\left(2a\,\mathrm{sh}^2\dfrac{u}{2}\right)\right]-$ $-i\cos(a\,\mathrm{ch}\,u)\left[C\left(2a\,\mathrm{sh}^2\dfrac{u}{2}\right)-S\left(2a\,\mathrm{sh}^2\dfrac{u}{2}\right)\right]$
8.248	$\dfrac{\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,(\pi t)}\,[J_{it}(a)+J_{-it}(a)]$	$\sin(a\,\mathrm{ch}\,u)\left[C\left(2a\,\mathrm{sh}^2\dfrac{u}{2}\right)-S\left(2a\,\mathrm{sh}^2\dfrac{u}{2}\right)\right]-$ $-\cos(a\,\mathrm{ch}\,u)\left[C\left(2a\,\mathrm{sh}^2\dfrac{u}{2}\right)+S\left(2a\,\mathrm{sh}^2\dfrac{u}{2}\right)\right]$
8.249	$\mathrm{th}\,(\pi t)\,\{[J_{it}(a)]^2+[Y_{it}(a)]^2\}$	$I_0\left(2a\,\mathrm{sh}\,\dfrac{u}{2}\right)-\mathbf{L}_0\left(2a\,\mathrm{sh}\,\dfrac{u}{2}\right)$
8.250	$K_\nu(at),\ -2<\mathrm{Re}\,\nu<2$	$\dfrac{\pi}{4a^\nu}\,\mathrm{cosec}\left(\dfrac{\pi\nu}{2}\right)(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}\times$ $\times\{[(u^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+u]^\nu-[(u^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-u]^\nu\}$
8.251	$t^{\nu+1}K_\nu(at),\ \mathrm{Re}\,\nu>-\dfrac{3}{2}$	$(2a)^\nu\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\nu+\dfrac{3}{2}\right)u\,(a^2+u^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}$
8.252	$t^{-\mu}K_\nu(at),\ \mathrm{Re}\,(\mu\pm\nu)<2$	$2^{-\mu}a^{\mu-2}\,\Gamma\left(1-\dfrac{\mu}{2}+\dfrac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(1-\dfrac{\mu}{2}-\dfrac{\nu}{2}\right)u\times$ $\times\,{}_2F_1\left(\dfrac{2-\mu+\nu}{2},\ \dfrac{2-\mu-\nu}{2};\ \dfrac{3}{2};\ -\dfrac{u^2}{a^2}\right)$
8.253	$t^{\frac{1}{2}}\,I_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(at)\,K_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}(at.)\ \mathrm{Re}\,\nu<\dfrac{5}{2}$	$\left(\dfrac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}}(2a)^{-\nu}(4a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}\,[u+(4a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu$

Suite

nº	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.254	$[I_\nu(at)+I_{-\nu}(at)]\,K_\nu(at)$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi}{2a}\,\mathfrak{P}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u^2}{2a^2}\right)$
8.255	$tI_\nu(bt)\,K_\nu(at)$, $a>b$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}(ab)^{-\frac{3}{2}}u\left[\left(\frac{a^2+b^2+u^2}{2ab}\right)^2-1\right]^{-\frac{1}{2}}\times$ $\times\,\mathfrak{Q}^1_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2+u^2}{2ab}\right)$
8.256	$t^{-\frac{1}{2}}I_\nu(at)\,K_\nu(at)$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{4}$	$\left(\frac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}}e^{i\pi\nu}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\nu\right)}\mathfrak{Q}^{-\nu}_{-\frac{1}{4}}\left[\left(1+4\frac{a^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\times$ $\times\,P^{-\nu}_{-\frac{1}{4}}\left[\left(1+\frac{4a^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$
8.257	$t^{1-2\nu}I_\nu(at)\,K_\nu(at)$, $0<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{-2\nu}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\nu\right)}{\Gamma(1+\nu)}u^{2\nu-2}\,{}_2F_1\left(\frac{3}{2}-\nu,\ \frac{1}{2};\ 1+\nu;\ -\frac{4a^2}{u^2}\right)$
8.258	$t^{\nu-\mu+1}J_\mu(at)\,K_\nu(bt)$, $\operatorname{Re}\mu>-1$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}$	$2^{\nu-\mu-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{(2\nu-2\mu+2)\,\Gamma(1+\mu)}\times$ $\times\,a^{\mu-\nu-\frac{5}{2}}u^{\frac{1}{2}}(\operatorname{sh}\lambda)^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\lambda-\cos\varphi)\times$

		$\times \operatorname{sh}[(\nu-\mu+1)\lambda]\, P^{-\nu}_{\nu-\mu+\frac{1}{2}}(\cos\varphi)$ $u+ib=ia \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}+i\frac{\lambda}{2}\right)$
8.259	$^{-\frac{1}{2}}[K_\nu(at)]^2, \quad -\frac{3}{4}<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{4}$	$\left(\frac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\nu\right)}\left[\mathfrak{Q}^{-\nu}_{-\frac{1}{4}}\left(1+\frac{4a^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$
8.260	$tK_\nu(at)\,K_\nu(bt), \quad -\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$	$\frac{\pi^2}{4}(ab)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\sec(\pi\nu)\, u\left[\left(\frac{a^2+b^2+u^2}{2ab}\right)^2-1\right]^{-\frac{1}{2}}\times$ $\times P^{-1}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2+u^2}{2ab}\right)$
8.261	$t^{1-2\nu}[K_\nu(at)]^2, \quad \operatorname{Re}\nu<\frac{3}{4}$	$\frac{\frac{\pi}{8}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-2\nu\right)}{\Gamma(2-\nu)}\, a^{2\nu-3}\, u\times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{3}{2}-\nu,\ \frac{3}{2}-2\nu;\ 2-\nu;\ -\frac{u^2}{4a^2}\right)$
8.262	$t^{\lambda-1}K_\nu(t)\,K_\mu(t)$, $\operatorname{Re}\lambda>\lvert\operatorname{Re}\mu\rvert+\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert>-1$	$2^{\lambda-2}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu-\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(1+\lambda)}\times$ $\times\Gamma\left(\frac{\lambda-\mu+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right)u\times$ $\times {}_4F_3\left(\frac{\lambda+\mu+\nu+1}{2},\ \frac{\lambda+\mu-\nu+1}{2},\ \frac{\lambda-\mu+\nu+1}{2},\right.$ $\left.\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2};\ \frac{3}{2},\ \frac{\lambda+1}{2},\ 1+\frac{\lambda}{2};\ -\frac{u^2}{4}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int\limits_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.263	$t^{2\nu}e^{-at^2}I_\nu(at^2),\ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{u}{2}\right)^{-2\nu}u^{-2\nu}\times$ $\times e^{-\frac{u^2}{8a}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-2\nu;\ 1-\nu;\ \frac{u^2}{8a}\right)$
8.264	$t^{1-2\nu}e^{-t^2}I_\nu(t^2),\ \operatorname{Re}\nu>0$	$2^{-\frac{1}{2}(1+\nu)}u^{\nu-1}e^{-\frac{u^2}{16}}W_{\frac{1}{2}(1-3\nu),\ \frac{1}{2}(1-\nu)}\left(\frac{u^2}{8}\right)$
8.265	$t^{2\nu+1}e^{-at^2}K_\nu(at^2),\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{4}$	$\frac{\pi}{4}(2a)^{-\nu-\frac{3}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+2\nu\right)}{\Gamma(\nu+2)}e^{-\frac{u^2}{8a}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\nu;\ 2+\nu;\ -\frac{u^2}{8a}\right)$
8.266	$\frac{1}{t}K_\nu\left(\frac{a}{t}\right),\ -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\pi K_\nu[(2au)^{\frac{1}{2}}]\{\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)J_\nu[(2au)^{\frac{1}{2}}]-\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Y_{[illegible]}[(2au)^{\frac{1}{2}}]\}$
8.267	$t^{1-2\nu}e^{t^2}K_\nu(t^2),\ 0<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{4}$	$\pi 2^{-\frac{1}{2}(1+\nu)}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-2\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}u^{\nu-1}e^{\frac{u^2}{16}}W_{\frac{3\nu}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{8}\right)$
8.268	$t^{2\mu-2}e^{-t^2}K_\nu(t^2),\ -\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}\nu$	$\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\mu+\nu)\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}2^{-u-1}u\times$ $\times{}_2F_2\left(\mu+\nu,\ \mu-\nu;\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}+\mu;\ -\frac{u^2}{8}\right)$

8.269	$t^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{8}-\nu}(at^2) K_{\frac{1}{8}+\nu}(at^2)$, $\operatorname{Re}\nu < \frac{5}{8}$	$\dfrac{\Gamma\left(\frac{5}{8}-\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \left(\dfrac{2\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{u} W_{\nu, \frac{1}{8}}\left(\dfrac{u^2}{8a}\right) M_{-\nu, \frac{1}{8}}\left(\dfrac{u^2}{8a}\right)$
8.270	$t^{-\frac{\nu}{2}} [K_\nu(a\sqrt{t})\cos(\nu\pi) + \frac{\pi}{2} Y_\nu(a\sqrt{t})]$, $-1 < \operatorname{Re}\nu < 2$	$\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-\nu} u^{\nu-1} \sin\left(\dfrac{a^2}{4u} - \dfrac{\pi\nu}{2}\right)$
8.271	$t^{-\frac{\nu}{2}} [K_\nu(a\sqrt{t})\sin(\nu\pi) + \frac{\pi}{2} J_\nu(a\sqrt{t})]$, $-1 < \operatorname{Re}\nu < 2$	$\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-\nu} u^{\nu-1} \cos\left(\dfrac{a^2}{4u} - \dfrac{\pi\nu}{2}\right)$
8.272	$t^{-\frac{1}{2}} K_\nu(a\sqrt{t})$, $-\frac{3}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}$	$-\dfrac{\pi}{4}\sec\left(\dfrac{\nu\pi}{2}\right)\left(\dfrac{\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\cos\left[\dfrac{\pi}{4}(\nu-1) - \dfrac{a^2}{8u}\right] J_{\frac{\nu}{2}}\left(\dfrac{a^2}{8u}\right) - \right.$ $\left. -\sin\left[\dfrac{\pi}{4}(\nu-1) - \dfrac{a^2}{8u}\right] Y_{\frac{\nu}{2}}\left(\dfrac{a^2}{8u}\right)\right\}$
8.273	$J_\nu(a\sqrt{t}) K_\nu(a\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}\nu > -2$	$\dfrac{\pi}{4u}\operatorname{cosec}(\pi\nu)\left[\mathbf{J}_\nu\left(i\dfrac{a^2}{2u}\right) + \mathbf{J}_\nu\left(-i\dfrac{a^2}{2u}\right) J_{\frac{\nu}{2}}\left(\dfrac{a^2}{8u}\right) - \right.$ $\left. -2\cos\left(\dfrac{\pi\nu}{2}\right) I_\nu\left(\dfrac{a^2}{2u}\right)\right]$
8.274	$K_\nu(a\sqrt{t})[J_\nu(a\sqrt{t}) + J_{-\nu}(a\sqrt{t})]$	$\cos\left(\dfrac{\pi\nu}{2}\right)\dfrac{1}{u}\cdot K_\nu\left(\dfrac{a^2}{2u}\right)$
8.275	$t^{-\frac{1}{2}} J_\nu(a\sqrt{t}) K_\nu(a\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}$	$\left(\dfrac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{a^2} \dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)} W_{-\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}\left(\dfrac{a^2}{2u}\right) M_{\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}\left(\dfrac{a^2}{2u}\right)$
8.276	$K_\nu(a\sqrt{t})[Y_\nu(a\sqrt{t}) - Y_{-\nu}(a\sqrt{t})]$	$-\sin\left(\dfrac{\pi\nu}{2}\right)\dfrac{1}{u} K_\nu\left(\dfrac{a^2}{2u}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.277	$t^{-\frac{1}{2}} K_\nu(a\sqrt{t})\{\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}\right) J_\nu(a\sqrt{t}) - \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right) Y_\nu(a\sqrt{t})\}$, $-\frac{3}{2}<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{3}{2}$	$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{4},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2}{2u}\right) W_{-\frac{1}{4},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{}{2u}\right)$
8.278	$[I_\nu(a\sqrt{t})+I_{-\nu}(a\sqrt{t})]\,K_\nu(a\sqrt{t})$, $-2<\mathrm{Re}\,\nu<2$	$-\frac{\pi}{2u}\left[\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}-\frac{a^2}{2u}\right) J_\nu\left(\frac{a^2}{2u}\right) + \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}-\frac{a^2}{2u}\right) Y_\nu\left(\frac{a^2}{2u}\right)\right]$
8.279	$K_\nu[(iat)^{\frac{1}{2}}]\,K_\nu[(-iat)^{\frac{1}{2}}]$, $-2<\mathrm{Re}\,\nu<2$	$\frac{\pi\nu}{4}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\frac{1}{u} S_{-1,\nu}\left(\frac{a}{2u}\right)$
8.280	$t^{-\frac{1}{2}} K_\nu[(iat)^{\frac{1}{2}}]\,K_\nu[(-iat)^{\frac{1}{2}}]$, $-\frac{3}{2}<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2a}\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\times W_{-\frac{1}{4},\frac{\nu}{2}}\left(i\frac{a}{2u}\right) W_{-\frac{1}{4},\frac{\nu}{2}}\left(-i\frac{a}{2u}\right)$
8.281	$\begin{cases}[t(a-t)]^{-\frac{1}{2}} I_\nu\{b[t(a-t)]^{\frac{1}{2}}\} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a,\ \mathrm{Re}\,\nu>-3\end{cases}$	$\pi\sin\left(\frac{au}{2}\right) J_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{4}[u+(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]\right\}\times$

		$\times J_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{4}\left[u-(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$
8.282	$t\,(b^2+t^2)^{\frac{\nu}{2}}\,K_\nu\left[a\,(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}\right]$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^\nu b^{\frac{3}{2}+\nu}\,(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\,K_{\nu+\frac{3}{2}}\left[b\,(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}\right]$
8.283	$[t\,(1+t)]^{-\frac{1}{2}}\,K_\nu\{b\,[t\,(1+t)]^{\frac{1}{2}}\}$, $-3<\operatorname{Re}\nu<3$	$\frac{\pi^2}{8}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{u}{2}\right)\left[J_{\frac{\nu}{2}}(x)\,Y_{\frac{\nu}{2}}(y)-J_{\frac{\nu}{2}}(y)\,Y_{\frac{\nu}{2}}(x)\right]-\right.$ $\left.-\sin\left(\frac{u}{2}\right)\left[J_{\frac{\nu}{2}}(y)\,J_{\frac{\nu}{2}}(x)+Y_{\frac{\nu}{2}}(y)\,Y_{\frac{\nu}{2}}(x)\right]\right\}$, $x=\frac{1}{4}\left[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-u\right],\quad y=\frac{1}{4}\left[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+u\right]$
8.284	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ (t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\,K_\nu\left[b\,(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi^2}{8}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left[J_{\frac{\nu}{2}}(y)\,Y_{\frac{\nu}{2}}(x)-J_{\frac{\nu}{2}}(x)\,Y_{\frac{\nu}{2}}(y)\right]$, $x=\frac{a}{2}\left[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+u\right],\quad y=\frac{a}{2}\left[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-u\right]$
8.285	$\begin{cases} t\,(a^2-t^2)^{\frac{\nu}{2}}\,Y_\nu\left[b\,(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \text{pour } 0<t<a, \\ \frac{2}{\pi}\,t\,(t^2-a^2)^{\frac{\nu}{2}}\,K_\nu\left[b\,(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}+\nu}\,b^\nu\,u\,(b^2+u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\times$ $\times Y_{\nu+\frac{3}{2}}\left[a\,(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t) \sin(ut)\, dt$
8.286	$\begin{cases} I_\nu(a \sin t) & \text{pour } 0 < t < \pi, \\ 0 & \text{pour } t > \pi, \ \operatorname{Re} \nu > -2 \end{cases}$	$\pi \sin\left(\frac{\pi u}{2}\right) I_{\frac{1}{2}(\nu-u)}\left(\frac{a}{2}\right) I_{\frac{1}{2}(\nu+u)}\left(\frac{a}{2}\right)$
8.287	$\begin{cases} K_\nu(a \sin t) & \text{pour } 0 < t < \pi, \\ 0 & \text{pour } t > \pi, \ -2 < \operatorname{Re} \nu < 2 \end{cases}$	$\frac{\pi^2}{2} \operatorname{cosec}(\pi\nu) \sin\left(\frac{\pi u}{2}\right) \left[I_{-\frac{1}{2}(\nu+u)}\left(\frac{a}{2}\right) I_{-\frac{1}{2}(\nu-u)}\left(\frac{a}{2}\right) - I_{\frac{1}{2}(\nu-u)}\left(\frac{a}{2}\right) I_{\frac{1}{2}(\nu+u)}\left(\frac{a}{2}\right)\right]$
8.288	$K_\nu(a \operatorname{sh} t), \ -2 < \operatorname{Re} \nu < 2$	$\frac{i\pi^2}{8} \operatorname{cosec}(\pi\nu) \left[J_{\frac{1}{2}(\nu-iu)}\left(\frac{a}{2}\right) Y_{-\frac{1}{2}(\nu+iu)}\left(\frac{a}{2}\right) - J_{-\frac{1}{2}(\nu+iu)}\left(\frac{a}{2}\right) Y_{\frac{1}{2}(\nu-iu)}\left(\frac{a}{2}\right) - J_{\frac{1}{2}(\nu+iu)}\left(\frac{a}{2}\right) Y_{-\frac{1}{2}(\nu-iu)}\left(\frac{a}{2}\right) + J_{-\frac{1}{2}(\nu-iu)}\left(\frac{a}{2}\right) Y_{\frac{1}{2}(\nu+iu)}\left(\frac{a}{2}\right)\right]$
8.289	$\operatorname{sh} t\, (a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{ch} t)^{-\frac{1}{2}} \times K_1\left[(a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{ch} t)^{\frac{1}{2}}\right]$	$\frac{1}{ab} u K_{iu}(a) K_{iu}(b)$

8.290	$\sin(\pi t)\, I_{\nu-t}(a)\, I_{\nu+t}(a)$	$\begin{cases} \frac{1}{4} I_{2\nu}\left(2a \sin\frac{u}{2}\right) & \text{pour } 0 < u < 2\pi, \\ 0 & \text{pour } u > 2\pi \end{cases}$
8.291	$\frac{\operatorname{ch}(bt)}{\operatorname{ch}(\pi t)} [I_{-it}(a) - I_{it}(a)],\ b \leqslant \frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\left\{e^{-a \operatorname{ch}(u+ib)} \operatorname{erf}\left[i\,(2a)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{u+ib}{2}\right)\right] + e^{-a \operatorname{ch}(u-ib)} \operatorname{erf}\left[i\,(2a)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{u-ib}{2}\right)\right]\right\}$
8.292	$K_{it}(a)\,[J_{it}(a) - J_{-it}(a)]$	$-i\,\frac{\pi}{2} J_0\left[a\,(2 \operatorname{sh} u)^{\frac{1}{2}}\right]$
8.293	$\frac{\operatorname{sh}(bt)}{\operatorname{ch}(\pi t)} [I_{it}(a) + I_{-it}(a)],\ b \leqslant \frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\left\{e^{-a \operatorname{ch}(u-ib)} \operatorname{erf}\left[i\,(2a)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{u+ib}{2}\right)\right] - e^{-a \operatorname{ch}(u-ib)} \operatorname{erf}\left[i\,(2a)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{u-ib}{2}\right)\right]\right\}$
8.294	$\operatorname{sh}(bt)\, K_{it}(a),\ b \leqslant \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} e^{-a \cos b \operatorname{ch} u} \sin(a \sin b \operatorname{sh} u)$
8.295	$\operatorname{csch}\left(\frac{\pi t}{2}\right) K_{it}(a)$	$\operatorname{sh} u \int_0^\infty e^{-\xi \operatorname{ch} u} K_0\left[(a^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\right] d\xi$
8.296	$\operatorname{csch}(\pi t)\, K_{it}(a)$	$\frac{1}{2} \operatorname{sh} u \int_0^\infty e^{-\xi \operatorname{ch} u} K_0(a+\xi)\, d\xi$
8.297	$\operatorname{th}(\pi t)\, K_{it}(a)$	$-\frac{i\pi}{2} e^{-a \operatorname{ch} u} \operatorname{erf}\left[i\,(2a)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$

Suite

nº	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.298	$\frac{\operatorname{sh}(bt)}{\operatorname{ch}(\pi t)} K_{it}(a)$, $b \leqslant \frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi i}{4}\left\{e^{a \operatorname{ch}(u+ib)} \operatorname{erfc}\left[(2a)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{u+ib}{2}\right)\right] - \right.$ $\left. - e^{a \operatorname{ch}(u-ib)} \operatorname{erfc}\left[(2a)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{u-ib}{2}\right)\right]\right\}$
8.299	$[Y_{it} - Y_{-it}(a)]\, K_{it}(a)$	$-i\left\{\frac{\pi}{2} Y_0[a(2\operatorname{sh} u)^{\frac{1}{2}}] + K_0[a(2\operatorname{sh} u)^{\frac{1}{2}}]\right\}$
8.300	$\operatorname{sh}(\pi t)\,[K_{it}(a)]^2$	$\frac{\pi^2}{4} J_0\left[2a \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
8.301	$tK_{it}(a)\,K_{it}(b)$	$\frac{\pi ab}{2} \operatorname{sh} u\,(a^2+b^2+2ab\operatorname{ch} u)^{-\frac{1}{2}} K_1[(a^2+b^2+2ab\operatorname{ch} u)^{\frac{1}{2}}]$
8.302	$t^{-\mu} S_{\mu,\,\mu+1}(at)$, $\operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2}$	$2^{-\mu-\frac{3}{2}} \pi\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right) a^{-\frac{1}{2}} (u^2-a^2)^{\frac{1}{2}\left(\mu-\frac{1}{2}\right)} \mathfrak{P}^{\mu-\frac{1}{2}}_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)$
8.303	$t^{-\mu} S_{\mu,\,\nu}(at)$, $\operatorname{Re}(\pm\nu-\mu) > -1$	$2^{-\mu}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(1-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right) \times$ $\times\Gamma\left(1-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right)(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}\left(\mu-\frac{1}{2}\right)} \mathfrak{P}^{\mu-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)$

8.304	$t^{\nu+1} S_{\mu,\,\nu}(at)$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}$, $-4 < \operatorname{Re}(\mu+\nu) < 0$	$\dfrac{\pi^{\frac{1}{2}}\, 2^{\mu+\nu}\, a^{\nu}\, \Gamma\left(2+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)} \times$ $\times\, u^{-2-2\nu}\, {}_2F_1\left(\frac{3}{2}+\nu,\ \frac{1-\mu+\nu}{2};\ \frac{5}{2}+\nu,\ 1-\frac{a^2}{u^2}\right)$
8.305	$\frac{1}{t} S_{-1,\,\nu}\left(\frac{a}{t}\right)$, $-1 < \operatorname{Re}\nu < 1$	$\frac{2}{\nu}\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) K_{\nu}[(2aiu)^{\frac{1}{2}}]\, K_{\nu}[(-2aiu)^{\frac{1}{2}}]$
8.306	$t^{1-\nu}\, U_{\nu}(t, a)$	$\begin{cases} \frac{\pi}{2}(1-2u)^{\frac{\nu}{2}-1} a^{2-\nu} J_{\nu-2}[a(1-2u)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0 < u < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{pour } u > \frac{1}{2} \end{cases}$
8.307	$\mathbf{J}_{\nu}(at) - \mathbf{J}_{-\nu}(at)$	$\begin{cases} 2\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\left[\nu \arccos\left(\frac{u}{a}\right)\right] & \text{pour } 0 < u < a, \\ 0 & \text{pour } u > a \end{cases}$
8.308	$\operatorname{th}\left(\frac{\pi t}{2}\right) S_{0,\, it}(a)$	$\frac{i}{2}[e^{a \operatorname{sh} u}\operatorname{Ei}(-a \operatorname{sh} u) - e^{-a \operatorname{sh} u}\,\overline{\operatorname{Ei}}(a \operatorname{sh} u)]$
8.309	$\mathbf{J}_{\nu}(a \operatorname{sh} t) - \mathbf{J}_{-\nu}(a \operatorname{sh} t)$	$-\frac{i\pi}{2}\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\operatorname{sch}\left(\frac{\pi u}{2}\right) \times$ $\times\left[I_{-\frac{1}{2}(\nu+iu)}\left(\frac{a}{2}\right) I_{\frac{1}{2}(\nu-iu)}\left(\frac{a}{2}\right) - \right.$ $\left. - I_{-\frac{1}{2}(\nu-iu)}\left(\frac{a}{2}\right) I_{\frac{1}{2}(\nu+iu)}\left(\frac{a}{2}\right)\right]$

Suite

nº	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.310	$\mathbf{J}_t(a) - \mathbf{J}_{-t}(a)$	$\begin{cases} \sin(a\sin u) & \text{pour } 0 < u < \pi, \\ 0 & \text{pour } u > \pi \end{cases}$
8.311	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}\right)[\mathbf{J}_t(a) + \mathbf{J}_{-t}(a)]$	$\begin{cases} \cos(a\sin u) & \text{pour } 0 < u < \pi, \\ 0 & \text{pour } u > \pi \end{cases}$
8.312	$t^{-\nu}[\mathbf{H}_\nu(at) - Y_\nu(at)]$, $\operatorname{Re}\nu < 1$	$\left(\frac{a}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} 2^{-2\nu} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)} (u^2-a^2)^{\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)} \times$ $\times \mathfrak{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)$
8.313	$t^{1+\nu}[\mathbf{H}_\nu(at) - Y_\nu(at)]$, $-\frac{3}{2} < \operatorname{Re}\nu < 0$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Gamma(3+2\nu)\, a^\nu u^{-\nu-\frac{1}{2}} \times$ $\times (a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \mathfrak{P}_{-\nu-\frac{3}{2}}^{-\nu-\frac{3}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)$
8.314	$t^\nu[I_\nu(at) - \mathbf{L}_\nu(at)]$	$\frac{2^\nu a^{\nu-1}}{\Gamma(1-\nu)} u^{-2\nu}\, {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; 1-\nu; -\frac{u^2}{a^2}\right)$
8.315	$t^{-\nu}[I_{-\nu}(at) - \mathbf{L}_\nu(at)]$, $\operatorname{Re}\nu < 1$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)} (2a)^{-\nu} (a^2+u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$

8.316	$t^{1-\nu}[I_\nu(at)-\mathbf{L}_\nu(at)]$	$\dfrac{2^{1-\nu}a^{\nu+1}}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}\dfrac{1}{u^2}\,{}_2F_1\left(1,\ 2;\ \frac{3}{2}+\nu;\ -\frac{a^2}{u^2}\right)$
8.317	$t^{1-\nu}[I_\nu(at)-\mathbf{L}_{-\nu}(at)],\ 0<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$	$\dfrac{2^{2-\nu}}{\pi}\cos(\pi\nu)\,\Gamma(2-\nu)\,a^{1-\nu}u^{2\nu-3}\times$ $\times\,{}_2F_1\left(2-\nu,\ 1;\ \frac{3}{2};\ -\frac{a^2}{u^2}\right)$
8.318	$t^{-\nu}\mathbf{H}_\nu(at),\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\begin{cases}\dfrac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(2a)^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}(a^2-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<u<a,\\ 0 & \text{pour } u>a\end{cases}$
8.319	$t^{-\nu}(b^2+t^2)^{-1}\mathbf{H}_\nu(at),\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{5}{2}$	$\dfrac{\pi}{2b^{\nu+1}}e^{-bu}\mathbf{L}_\nu(ab)\ (0<u<a)$

§ 12. Fonctions hypergéométriques dégénérées

8.320	$t^{\nu-1}\operatorname{erf}(at),\ -2<\operatorname{Re}\nu<1$	$\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\Gamma(\nu)\,u^{-\nu}-\pi^{-\frac{1}{2}}a^{-\nu-1}(1+\nu)^{-1}\times$ $\times\,\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)u\,{}_2F_2\left(\frac{1+\nu}{2},\ 1+\frac{\nu}{2};\ \frac{3}{2},\ \frac{3+\nu}{2};\ -\frac{u^2}{4a^2}\right)$
8.321	$e^{-a^2t^2}\operatorname{erf}(iat)$	$\dfrac{i\pi^{\frac{1}{2}}}{2a}e^{-\frac{u^2}{4a^2}}$
8.322	$\dfrac{1}{t}\operatorname{erf}\left[(at)^{\frac{1}{2}}\right]$	$-\dfrac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}\left\{\dfrac{\left[(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-a\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+a\right]^{\frac{1}{2}}-(2a)^{\frac{1}{2}}}\right\}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.323	$t^{-\frac{1}{2}}\operatorname{erf}\left[(at)^{\frac{1}{2}}\right]$	$\frac{1}{2}(2\pi u)^{-\frac{1}{2}}\left\{\ln\left[\frac{a+u+(2au)^{\frac{1}{2}}}{a+u-(2au)^{\frac{1}{2}}}\right]+2\operatorname{arctg}\left[\frac{(2au)^{\frac{1}{2}}}{u-a}\right]\right\}$
8.324	$\operatorname{erf}\left[(at)^{-\frac{1}{2}}\right]$	$\frac{1}{u}\left\{1-e^{-\left(\frac{2u}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\cos\left[\left(\frac{2u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$
8.325	$e^{-a^2\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{erf}(ia\operatorname{sh} t)$	$\frac{i}{2}e^{\frac{a^2}{2}}\operatorname{th}\left(\frac{\pi u}{2}\right)K_{\frac{iu}{2}}\left(\frac{a^2}{2}\right)$
8.326	$\operatorname{erfc}(at)$	$\frac{1}{u}\left(1-e^{-\frac{u^2}{4a^2}}\right)$
8.327	$t^{\nu-1}\operatorname{erfc}(at)$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\pi^{-\frac{1}{2}}a^{-\nu-1}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{1+\nu}u\times$ $\times{}_2F_2\left(\frac{1+\nu}{2},\ 1+\frac{\nu}{2};\ \frac{3}{2},\ \frac{3+\nu}{2};\ -\frac{u^2}{4a^2}\right)$
8.328	$e^{a^2t^2}\operatorname{erfc}(at)$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2a}e^{\frac{u^2}{4a^2}}\operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2a}\right)$
8.329	$e^{-bt}\operatorname{erfc}\left(ab-\frac{t}{2a}\right)-e^{bt}\operatorname{erfc}\left(ab+\frac{t}{2a}\right)$	$2u(b^2+u^2)^{-1}e^{-a^2(b^2+u^2)}$

8.330	$\operatorname{erf}\left(\frac{a}{t}\right)$	$\frac{2}{u}-\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{u}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-au)^m}{m!\,\Gamma\left(\frac{1+m}{2}\right)}$
8.331	$\operatorname{erfc}\left[(at)^{\frac{1}{2}}\right]$	$\frac{1}{u}-\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}\left[(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-a\right]^{-\frac{1}{2}}$
8.332	$\frac{1}{t}\operatorname{erfc}\left[(at)^{\frac{1}{2}}\right]$	$\pi-2\operatorname{arctg}\left\{\frac{\left[(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-a\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+a\right]^{\frac{1}{2}}-(2a)^{\frac{1}{2}}}\right\}$
8.333	$e^{at}\operatorname{erfc}\left[(at)^{\frac{1}{2}}\right]$	$\frac{1+\left(\frac{2u}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}}{a+u+(2au)^{\frac{1}{2}}}$
8.334	$\frac{1}{t}e^{at}\operatorname{erfc}\left[(at)^{\frac{1}{2}}\right]$	$2\operatorname{arctg}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}+(2a)^{\frac{1}{2}}}\right]$
8.335	$\frac{1}{t}\operatorname{erfc}\left(at^{-\frac{1}{2}}\right)$	$i\left\{\operatorname{Ei}\left[-a(-2iu)^{\frac{1}{2}}\right]-\operatorname{Ei}\left[-a(2iu)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$
8.336	$t^{-1}e^{\frac{a^2}{t}}\operatorname{erfc}\left(at^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\frac{i\pi}{2}\left\{\mathbf{H}_0\left[2a(iu)^{\frac{1}{2}}\right]-\mathbf{H}_0\left[2a(-iu)^{\frac{1}{2}}\right]-\right.$ $\left.-Y_0\left[2a(iu)^{\frac{1}{2}}\right]+Y_0\left[2a(-iu)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.337	$\operatorname{erf}[t(at)^{\frac{1}{2}}]\operatorname{erfc}[(at)^{\frac{1}{2}}]$	$t\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}[a+(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}}$
8.338	$\operatorname{erfc}\{a[(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}+b]^{\frac{1}{2}}\}\times$ $\times\operatorname{erf}\{ia[(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}-b]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}ae^{-a^2b}(a^4+u^2)^{-\frac{1}{2}}[(a^4+u^2)^{\frac{1}{2}}+a^2]^{-\frac{1}{2}}e^{-b\sqrt{a^4+u^2}}$
8.339	$e^{a^2\operatorname{ch}2t}\operatorname{erfc}(a\operatorname{sh}t)$	$\frac{1}{2}e^{\frac{a^2}{2}}\left\{\operatorname{csch}\left(\frac{\pi u}{2}\right)\int_0^\pi e^{-\frac{a^2}{2}\cos\xi}\operatorname{ch}\left(\frac{u\xi}{2}\right)d\xi-\pi\operatorname{csch}(\pi u)\times\right.$ $\left.\times\left[I_{\frac{iu}{2}}\left(\frac{a^2}{2}\right)+I_{-\frac{iu}{2}}\left(\frac{a^2}{2}\right)\right]\right\}$
8.340	$e^{-\frac{t^2}{4}}[D_\nu(t)-D_\nu(-t)],\ \operatorname{Re}\nu>0$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)u^\nu e^{-\frac{u^2}{2}}$
8.341	$t^\mu e^{-\frac{a^2t^2}{4}}D_\nu(t),\ \operatorname{Re}\mu>-2$	$2^{\frac{1}{2}(\nu-\mu-2)}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\mu+2)}{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+3}{2}\right)}a^{-\mu-2}u\times$ $\times{}_2F_2\left(1+\frac{\mu}{2},\ \frac{3}{2}+\frac{\mu}{2};\ \frac{3}{2},\ \frac{\mu-\nu+3}{2};\ -\frac{u^2}{2a^2}\right)$
8.342	$t^{-\frac{1}{2}(1+\nu)}e^{\frac{a^2t}{4}}D_\nu(at^{\frac{1}{2}}),\ \operatorname{Re}\nu<3$	$\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}}[u+(a+u^{\frac{1}{2}})^2]^{\frac{\nu}{2}}\sin\left[\frac{\pi}{4}-\nu\operatorname{arctg}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{a+u^{\frac{1}{2}}}\right)\right]$

8.343	$t^{-\frac{\nu}{2}-\frac{3}{2}} e^{\frac{a^2 t}{4}} D_\nu (a t^{\frac{1}{2}})$, $\operatorname{Re} \nu < 1$	$2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{[(a+u^{\frac{1}{2}})^2+u]^{\frac{1}{2}(\nu+1)}}{1+\nu} \times$ $\times \sin\left[(\nu+1)\operatorname{arctg}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{a+u^{\frac{1}{2}}}\right)\right]$
8.344	$t^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} e^{-\frac{a^2}{4t}} D_\nu (a t^{-\frac{1}{2}})$, $\operatorname{Re} \nu > -1$	$\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{\nu}{2}} u^{\frac{1}{2}(\nu-1)} e^{-a\sqrt{u}} \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}-a\sqrt{u}\right)$
8.345	$D_{-\nu-1}[(2t)^{\frac{1}{2}}]\{D_\nu[(2t)^{\frac{1}{2}}]-D_\nu[-(2t)^{\frac{1}{2}}]\}$, $\operatorname{Re} \nu > 0$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) u^\nu (1+u^2)^{-\frac{1}{2}} [1+(1+u^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\frac{1}{2}}$
8.346	$t^{2\nu-1} e^{-\frac{t^2}{4}} M_{3\nu,\,\nu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{4}$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} u^{2\nu-1} e^{-\frac{u^2}{4}} M_{3\nu,\,\nu}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
8.347	$t^{-2\nu} e^{\frac{t^2}{4}} W_{3\nu-1,\,\nu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} u^{-2\nu} e^{\frac{u^2}{4}} W_{3\nu-1,\,\nu}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
8.348	$t^{-2\mu} e^{-\frac{t^2}{4}} M_{k,\,\mu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re}(\mu+k) > \frac{1}{2}$	$\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}(k+3\mu)} \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+k\right)} \times$ $\times u^{k+\mu-1} e^{-\frac{u^2}{4}} W_{\frac{1}{2}(1+k-3\mu),\,\frac{1}{2}(k+\mu-1)}\left(\frac{u^2}{2}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.349	$t^{2\mu-1}e^{-\frac{t^2}{4}}M_{k,\mu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}k$	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}(2\mu-k-1)}\frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(1+k-\mu)}\times$ $\times u^{k-\mu-1}e^{-\frac{u^2}{4}}M_{\frac{1}{2}(k+3\mu),\ \frac{1}{2}(k-\mu)}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
8.350	$t^{-2\mu}e^{-\frac{t^2}{4}}W_{k,\mu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re}\mu<\frac{3}{4}$	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{2}(k+3\mu)}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-2\mu\right)}{\Gamma(2-k-\mu)}\times$ $\times u^{k+\mu-1}e^{-\frac{u^2}{4}}M_{\frac{1}{2}(1+k-3\mu),\ \frac{1}{2}(1-k-\mu)}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
8.351	$t^{-2\mu-1}e^{\frac{t^2}{4}}W_{k,\mu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re}(\mu-k)>\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\mu<\frac{3}{4}$	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}(k-3\mu)}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-2\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)}\times$ $\times u^{\mu-k-1}e^{\frac{u^2}{4}}W_{\frac{1}{2}(k+3\mu-1),\ \frac{1}{2}(k-\mu+1)}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
8.352	$t^{2\lambda-1}e^{-\frac{t^2}{2}}W_{k,\mu}(t^2)$, $\operatorname{Re}\lambda>\lvert\operatorname{Re}\mu\rvert-1$	$\frac{\Gamma(1+\mu+\lambda)\,\Gamma(1-\mu+\lambda)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-k+\lambda\right)}u\times$ $\times{}_2F_2\left(1+\lambda+\mu,\ 1+\lambda-\mu;\ \frac{3}{2},\frac{3}{2}-k+\lambda;\ -\frac{u^2}{4}\right)$

8.353	$t^{-\frac{1}{2}} K_{\mu-\frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right) M_{k,\mu}(t^2)$, $\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re} k > -\frac{1}{4}$	$\frac{\Gamma(1+2\mu)}{2\Gamma\left(k+\frac{5}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}(k-\mu),\, \frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{u^2}{2}\right) \times$ $\times M_{\frac{1}{2}(k-\mu),\, \frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
8.354	$t^{2\mu-1} W_{k,\mu}(at)\, M_{-k,\mu}(at)$, $\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}(\mu+k) < \frac{1}{4}$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}} a^{2k}}{2} \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(1-\mu-k)} \left(\frac{u}{2}\right)^{-2(\mu+k)} \times$ $\times {}_3F_2\left(\frac{1}{2}-k,\ 1-k,\ \frac{1}{2}+\mu-k;\ 1-2k,\ 1-\mu-k;\ -\frac{u^2}{a^2}\right)$
8.355	$t^{\lambda} W_{k,\mu}(at)\, W_{-k,\mu}(at)$, $\operatorname{Re}\lambda > 2\lvert\operatorname{Re}\mu\rvert - 3$	$\frac{a^{1-2\lambda}}{2} \frac{\Gamma(\mu+\lambda)\,\Gamma(\lambda-\mu)\,\Gamma(2\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\lambda\right)} u \times$ $\times {}_4F_3\left(\lambda,\ \frac{1}{2}+\lambda,\ \lambda+\mu,\ \lambda-\mu;\ \frac{1}{2}+k+\lambda,\ \frac{1}{2}-k+\lambda,\ \frac{3}{2};\ -\frac{u^2}{a^2}\right)$
8.356	$t^{-\frac{3}{2}} W_{\mu+\lambda,\, \frac{1}{8}+k}\left(\frac{t^2}{2}\right) M_{\mu-\lambda,\, \frac{1}{8}-k}\left(\frac{t^2}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}-2k\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-2\lambda\right)} u^{-\frac{3}{2}} \times$ $\times W_{\mu+k,\, \lambda+\frac{1}{8}}\left(\frac{u^2}{2}\right) M_{\mu-k,\, \frac{1}{8}-\lambda}\left(\frac{u^2}{2}\right)$

§ 13. Fonctions sphériques

nº	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.357	$\mathfrak{P}_\nu(1+at),\ -1<\operatorname{Re}\nu<0$	$\left(\frac{2au}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\sin\left(\frac{u}{a}-\frac{\nu\pi}{2}\right)J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)-\right.$ $\left.-\cos\left(\frac{u}{a}-\frac{\nu\pi}{2}\right)Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)\right]$
8.358	$\mathfrak{P}_\nu(1+at^2),\ -1<\operatorname{Re}\nu<0$	$(2a)^{-\frac{1}{2}}K_{\nu+\frac{1}{2}}[u(2a)^{-\frac{1}{2}}]\{I_{\nu+\frac{1}{2}}[u(2a)^{-\frac{1}{2}}]+$ $+I_{-\nu-\frac{1}{2}}[u(2a)^{-\frac{1}{2}}]\}$
8.359	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<a,\\ \mathfrak{P}_\nu(2t^2a^{-2}-1) & \text{pour } t>a,\end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<0$	$-\frac{\pi a}{4}\sec(\pi\nu)\left\{\left[J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right]^2-\left[J_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right]^2\right\}$
8.360	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<a+b,\\ \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{t^2-a^2-b^2}{2ab}\right) & \text{pour } t>a+b,\end{cases}$ $-1<\operatorname{Re}\nu<0$	$-\frac{\pi}{2}(ab)^{\frac{1}{2}}[J_{\nu+\frac{1}{2}}(au)Y_{-\nu-\frac{1}{2}}(au)+Y_{\nu+\frac{1}{2}}(au)J_{-\nu-\frac{1}{2}}(au)]$

8.361	$\frac{1}{t}\,\mathfrak{Q}_\nu\left(1+\frac{2a^2}{t^2}\right)$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(1+\nu)}{au}\,W_{-\frac{1}{2}-\nu,\,0}(au)\,M_{\frac{1}{2}+\nu,\,0}(au)$
8.362	$[(a+t)(b+t)]^{\frac{\nu}{2}}\times$ $\times\mathfrak{P}_\nu\left[2\left(1+\frac{t}{a}\right)\left(1+\frac{t}{b}\right)-1\right]$, $-1<\operatorname{Re}\nu<0$	$-\frac{\pi}{4}(ab)^{\frac{1}{2}(\nu+1)}\left\{\left[J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{bu}{2}\right)-\right.\right.$ $\left.-Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{bu}{2}\right)\right]\cos\left[\frac{(a+b)u}{2}-\pi\nu\right]+$ $+\left[J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{bu}{2}\right)+\right.$ $\left.\left.+J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{bu}{2}\right)Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right]\sin\left[\frac{(a+b)u}{2}-\pi\nu\right]\right\}$
8.363	$\begin{cases}(1-t^2)^{-\frac{\mu}{2}}P_\nu^\mu(t) & \text{pour } 0<t<1,\\ 0 & \text{pour } t>1\end{cases}$	$\pi^{\frac{1}{2}}\,2^{\mu-2}\,\frac{(1-\mu-\nu)(2+\nu-\mu)}{\Gamma\left(\frac{3-\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-\mu+\nu}{2}\right)}\,u^{\mu-\frac{1}{2}}\,s_{\frac{1}{2}-\mu,\,\frac{1}{2}+\nu}(u)$
8.364	$\begin{cases}t^{\lambda-1}(1-t^2)^{-\frac{\mu}{2}}P_\nu^\mu(t) & \text{pour } 0<t<1,\\ 0 & \text{pour } t>1,\end{cases}$ $\operatorname{Re}\lambda>-1$, $\operatorname{Re}\mu<1$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,2^{\mu-\lambda-1}\,\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda-\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+\lambda+\nu-\mu}{2}\right)}\,u\times$ $\times\,{}_2F_3\left(\frac{1+\lambda}{2},\ 1+\frac{\lambda}{2};\ \frac{3}{2},\ 1+\frac{\lambda-\mu-\nu}{2},\ \frac{3+\lambda-\mu+\nu}{2};\ -\frac{u^2}{4}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u) = \int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.365	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < 1, \\ (t^2-1)^{-\frac{\mu}{2}} \mathfrak{P}_\nu^\mu(t) & \text{pour } t > 1, \end{cases}$ $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\mu < 1,\ \operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu > -\operatorname{Re}(1+\mu)$	$\left(\frac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}} u^\mu \left[\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}-\frac{\pi\nu}{2}\right) J_{\nu+\frac{1}{2}}(u) - \right.$ $\left. -\cos\left(\frac{\pi\mu}{2}-\frac{\pi\nu}{2}\right) Y_{\nu+\frac{1}{2}}(u)\right]$
8.366	$(t^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \mathfrak{P}_\nu^\mu(t),\ \operatorname{Re}\mu < \frac{3}{2},\quad \operatorname{Re}(\mu+\nu) < 1$	$\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{u}\right)^\mu \left[\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right) \times \right.$ $\left. \times \Gamma\left(1-\frac{\mu-\nu}{2}\right)\right]^{-1} S_{\mu+\frac{1}{2},\ \nu+\frac{1}{2}}(u)$
8.367	$[t(1+t)]^{-\frac{\mu}{2}} \mathfrak{P}_\nu^\mu(1+2t),\ \operatorname{Re}\mu < 2,$ $-1-\operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\mu$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}} u^\mu \left\{\sin\left[\frac{u}{2}+(\mu-\nu)\frac{\pi}{2}\right] J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right) \times \right.$ $\left. \times -\cos\left[\frac{u}{2}+(\mu-\nu)\frac{\pi}{2}\right] Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)\right\}$

8.368	$\operatorname{sh}(\pi t)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+it\right)\times$ $\times\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-it\right)\mathfrak{P}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch} a)$, $\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } u<a, \\ \dfrac{\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)(\operatorname{sh} a)^{\mu}}(\operatorname{ch} u-\operatorname{ch} a)^{\mu-\frac{1}{2}} & \text{pour } u>a \end{cases}$
8.369	$\mathfrak{Q}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch} a)-\mathfrak{Q}^{\mu}_{-\frac{1}{2}-it}(\operatorname{ch} a)$, $\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } u<a, \\ \dfrac{-i\pi e^{i\pi\mu}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}(\operatorname{sh} a)^{\mu}(\operatorname{ch} u-\operatorname{ch} a)^{-\mu-\frac{1}{2}} & \text{pour } u>a \end{cases}$

§ 14. Fonctions diverses

8.370	$\begin{cases} K\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$\frac{9}{32}\pi^{\frac{3}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\right]^{-2}u^{-\frac{1}{2}}s_{\frac{1}{2},\,0}(u)$
8.371	$\begin{cases} \frac{1}{a}K\left(\frac{t}{a}\right) & \text{pour } 0<t<a, \\ \frac{1}{t}K\left(\frac{a}{t}\right) & \text{pour } t>a \end{cases}$	$\frac{\pi^2}{4}\left[J_0\left(\frac{au}{2}\right)\right]^2$

Suite

n°	$f(t)$	$F_s(u)=\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$
8.372	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<1, \\ (1+t)^{-\frac{1}{2}} K\left[\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2u}\right)^{\frac{1}{2}}[J_0(u)-Y_0(u)]$
8.373	$(1+t)^{-\frac{1}{2}} K\left[\left(\frac{t}{1+t}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$	$\frac{\pi}{4}^{\frac{3}{2}} u^{-\frac{1}{2}}\left[J_0(u)\sin\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-Y_0(u)\cos\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$
8.374	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ \frac{1}{t} K\left[\left(1-\frac{a^2}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } t>a \end{cases}$	$-\frac{\pi^2}{4} J_0\left(\frac{au}{2}\right) Y_0\left(\frac{au}{2}\right)$
8.375	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a \\ (t^2-b^2)^{-\frac{1}{2}} K\left[\left(\frac{t^2-a^2}{t^2-b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } t>a \ (a>b) \end{cases}$	$-\frac{\pi^2}{8}\left\{J_0\left[\frac{u(a+b)}{2}\right] Y_0\left[\frac{u(a-b)}{2}\right]+ +Y_0\left[\frac{u(a+b)}{2}\right] J_0\left[\frac{u(a-b)}{2}\right]\right\}$

8.376	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < b, \\ (a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}} K\left[\left(\frac{t^2-b^2}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } b < t < a, \\ (t^2-b^2)^{-\frac{1}{2}} K\left[\left(\frac{a^2-b^2}{t^2-b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } t > a \end{cases}$	$\frac{\pi^2}{4} J_0\left[\frac{u(a+b)}{2}\right] J_0\left[\frac{u(a-b)}{2}\right]$
8.377	$(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} K\left[t(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$	$\frac{\pi}{2} I_0\left(\frac{au}{2}\right) K_0\left(\frac{au}{2}\right)$

CHAPITRE IX

TRANSFORMATION DE LAPLACE-CARSON

§ 1. Formules fondamentales

nº	$f(t)$	$F(p)=p\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$
9.1	$\varphi(t)$	$F(p)$
9.2	$\varphi\left(\frac{t}{a}\right)$	$F(ap)$
9.3	$\varphi(t+a),\ a\geqslant 0$	$e^{ap}\left[F(p)-p\int\limits_0^a e^{-pu}\varphi(u)\,du\right]$
9.4	$e^{\beta t}\varphi(at)$	$\frac{p}{p-\beta}F\left(\frac{p-\beta}{\alpha}\right)$
9.5	$\begin{cases}0 & \text{pour } t<a,\\ \varphi(t-a) & \text{pour } t>a\end{cases}$	$e^{-ap}F(p)$
9.6	$\begin{cases}0 & \text{pour } t<\frac{b}{a},\\ \varphi(at-b) & \text{pour } t>\frac{b}{a}\end{cases}$	$e^{-\frac{b}{a}p}F\left(\frac{p}{a}\right)$

9.7	$\frac{d}{dt}\varphi(t)$	$p[F(p)-\varphi(0)]$
9.8	$\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)$	$p^n\left[F(p)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{p^k}\right]$
9.9	$\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
9.10	$\varphi(t)$ est une fonction a-périodique $(a>0)$ $[\varphi(t)=\varphi(t+a)]$	$\frac{p\int_0^a e^{-pt}\varphi(t)\,dt}{p-e^{-ap}}$
9.11	$(-t)^n\varphi(t)$	$p\frac{d^n}{dp^n}\left[\frac{E(p)}{p}\right]$
9.12	$\left(t\frac{d}{dt}\right)^n\varphi(t)$	$(-1)^n\left(p\frac{d}{dp}\right)^n F(p)$
9.13	$\int_0^t t\int_0^t \dots t\int_0^t t\varphi(t)\,(dt)^n$	$(-1)^n p\left(\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\right)^n\left[\frac{F(p)}{p}\right]$
9.14	$\frac{\varphi(t)}{t^n}$	$p\int_p^\infty \dots \int_p^\infty \frac{F(p)}{p}(dp)^n$
9.15	$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^n\varphi(t)$, si $\left[\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^s\varphi(t)\right]_{t=0}=0$ pour $s=0, 1, \dots, (n-1)$	$p\int_p^\infty p\int_p^\infty \dots p\int_p^\infty F(p)\,(dp)^n$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.16	$\operatorname{ch} \alpha t\, \varphi(t)$	$\frac{p}{2}\left[\frac{F(p-\alpha)}{p-\alpha}+\frac{F(p+\alpha)}{p+\alpha}\right]$
9.17	$\operatorname{sh} \alpha t\, \varphi(t)$	$\frac{p}{2}\left[\frac{F(p-\alpha)}{p-\alpha}-\frac{F(p+\alpha)}{p+\alpha}\right]$
9.18	$\cos \alpha t\, \varphi(t)$	$\frac{p}{2}\left[\frac{F(p-i\alpha)}{p-i\alpha}+\frac{F(p+i\alpha)}{p+i\alpha}\right]$
9.19	$\sin \alpha t\, \varphi(t)$	$\frac{p}{2i}\left[\frac{F(p-i\alpha)}{p-i\alpha}-\frac{F(p+i\alpha)}{p+i\alpha}\right]$
9.20	$\int_0^t \frac{\varphi(t)}{\tau}\,d\tau$	$\int_p^\infty \frac{F(z)}{z}\,dz$
9.21	$\int_t^\infty \frac{\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau$	$\int_0^p \frac{F(z)}{z}\,dz$
9.22	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau})\,\varphi(\tau)\,d\tau$	$pF\left(\frac{1}{p}\right)$
9.23	$\int_0^\infty \frac{\sin(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi\tau}}\,\varphi(\tau)\,d\tau$	$\sqrt{p}\,F\left(\frac{1}{p}\right)$

9.24	$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi\tau}}\varphi(\tau)\,d\tau$	$-\sqrt{p}F\left(-\frac{1}{p}\right)$
9.25	$\int_0^\infty \frac{\cos(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi t}}\varphi(\tau)\,d\tau$	$p^{\frac{3}{2}}F\left(\frac{1}{p}\right)$
9.26	$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi t}}\varphi(\tau)\,d\tau$	$-p^{\frac{3}{2}}F\left(-\frac{1}{p}\right)$
9.27	$t^{\frac{\nu}{2}}\int_0^\infty \frac{J_\nu(2\sqrt{t\tau})}{\tau^{\frac{\nu}{2}}}\varphi(\tau)\,d\tau$, Re $\nu > -1$	$\frac{1}{p^{\nu-1}}F\left(\frac{1}{p}\right)$
9.28	$\int_0^t J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)})\,\varphi(\tau)\,d\tau$	$\frac{F\left(p+\frac{1}{p}\right)}{p+\frac{1}{p}}$
9.29	$\frac{t\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty J_{1,\frac{1}{2}}\left[3\sqrt{\frac{t^2\tau}{4}}\right]\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}$	$F\left(\frac{1}{p^2}\right)$
9.30	$\int_0^\infty \left[1-2\sqrt{\pi}\,J_{1,\frac{1}{2}}\left(3\sqrt[3]{\frac{t^2\tau}{4}}\right)\right]\varphi(\tau)\,d\tau$	$p^2F\left(\frac{1}{p^2}\right)$
9.31	$\int_0^\infty {}_0F_n\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1; \frac{-\tau t^n}{n^n}\right)\varphi(\tau)\,d\tau$	$p^nF\left(\frac{1}{p^n}\right)$

Suite

nº	$f(t)$	$F(p)=p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.32	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\varphi(\tau)\,d\tau$	$F(\sqrt{p})$
9.33	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\int_0^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\varphi(\tau)\,d\tau$	$\sqrt{p}F(\sqrt{p})$
9.34	$\frac{1}{2^{1+\frac{n}{2}}\sqrt{\pi}t^{1+\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\mathrm{He}_{n+1}\left(\frac{\tau}{\sqrt{2t}}\right)\varphi(\tau)\,d\tau$	$p^{\frac{n+1}{2}}F(\sqrt{p})$
9.35	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2t)^{\nu+1}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{8t}}D_{2\nu+1}\left(\frac{\tau}{\sqrt{2t}}\right)\varphi(\tau)\,d\tau$	$p^{\nu+\frac{1}{2}}F(\sqrt{p})$
9.36	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}x^{\frac{\nu}{2}}\,dx\int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{x\xi})\varphi(\xi)\xi^{-\frac{\nu}{2}}\,d\xi$	$p^{\frac{1-\nu}{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$
9.37	$\frac{1}{\sqrt{\pi}t^{1+\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}\mathrm{He}_n\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)dx\times$ $\times\int_0^\infty \varphi(\xi)J_\nu(2\sqrt{x\xi})\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\frac{\nu}{2}}d\xi$	$p^{\frac{n-\nu-1}{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$

9.38	$\int_0^\infty \psi(\tau, t)\,\varphi(\tau)\,d\tau - \int_0^\infty d\xi \int_0^\xi \psi(\xi, t)\,J_1(\tau)\,\varphi(\sqrt{\xi^2-\tau^2})\,d\tau$	$\frac{p}{\sqrt{p+1}}F(\sqrt{p+1})$
9.39	$\int_0^\infty \psi(\tau, t)\,\varphi(\tau)\,d\tau + \int_0^\infty du \int_0^u \psi(u, t)\,I_1(\tau)\,\varphi(\sqrt{u^2-\tau^2})\,d\tau$	$\frac{p}{\sqrt{p-1}}F(\sqrt{p-1})$
9.40	$(2t)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty \chi(\tau, t)\,\mathrm{He}_n\left(\frac{\tau}{\sqrt{2t}}\right)\left[\varphi(\tau) - \int_0^\tau \varphi(\sqrt{\tau^2-u^2})\,J_1(u)\,du\right]d\tau$	$\frac{p^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{p+1}}F(\sqrt{p+1})$
9.41	$(2t)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty \chi(\tau, t)\,\mathrm{He}_n\left(\frac{\tau}{\sqrt{2t}}\right)\left[\varphi(\tau) + \int_0^\tau \varphi(\sqrt{\tau^2-u^2})\,I_1(u)\,du\right]d\tau$	$\frac{p^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{p-1}}F(\sqrt{p-1})$
9.42	$\int_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\,\varphi(\tau)\,d\tau$	$\frac{p}{p^2+1}F(\sqrt{p^2+1})$
9.43	$\int_0^t I_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\,\varphi(\tau)\,d\tau$	$\frac{p}{p^2-1}F(\sqrt{p^2-1})$
9.44	$\varphi(t) - t\int_0^t \frac{J_1(\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\,\varphi(\tau)\,d\tau$	$\frac{p^2}{p^2+1}F(\sqrt{p^2+1})$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$
9.45	$\varphi(t)+t\int_0^t \frac{I_1(\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\varphi(\tau)\,d\tau$	$\frac{p^2}{p^2-1}F(\sqrt{p^2-1})$
9.46	$\varphi(t)-\int_0^t \varphi(\sqrt{t^2-\tau^2})\,J_1(\tau)\,d\tau$	$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}F(\sqrt{p^2+1})$
9.47	$\varphi(t)+\int_0^t \varphi(\sqrt{t^2-\tau^2})\,I_1(\tau)\,d\tau$	$\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}F(\sqrt{p^2-1})$
9.48	$\int_0^t \psi(\tau, t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$	$\frac{p}{p+\sqrt{p}}F(p+\sqrt{p})$
9.49	$\int_0 \chi(\tau, t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$	$\frac{\sqrt{p}}{p+\sqrt{p}}F(p+\sqrt{p})$
9.50	$\int_0^\infty \frac{t^\xi\varphi'(\xi)}{\Gamma(\varepsilon+1)}\,d\xi+\varphi(0)$	$F(\ln p)$
9.51	$\int_0^\infty \frac{t^\xi}{\Gamma(\xi+1)}\varphi(\xi)\,d\xi$	$\frac{F(\ln p)}{\ln p}$
9.52	$\int_0^\infty \frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi$	$\frac{p}{\ln p}F(\ln p)$

9.53	$\int_0^\infty \frac{t^{\nu\xi-1}}{\Gamma(\nu\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi$	$\frac{p}{\ln p^\nu}F(\ln p^\nu)$
9.54	$\varphi(t^2)$	$\frac{p}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{p^2x^2}{4}}F\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$
9.55	$\frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t-\xi)\,g(\xi)\,d\xi$	$F(p)\,G(p)$
9.56	$t^n\varphi(t^2)$	$\frac{p2^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^n e^{-\frac{p^2x^2}{4}}\mathrm{He}_n\left(\frac{px}{\sqrt{2}}\right)F\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$
9.57	$t^\nu\varphi(t^2)$	$\sqrt{2\pi}\int_0^\infty x^\nu e^{-\frac{p^2x^2}{4}}D_\nu(px)F\left(\frac{1}{2x^2}\right)dx$
9.58	$t^{\nu-1}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$, Re $\nu>-1$	$p^{1-\frac{\nu}{2}}\int_0^\infty x^{\frac{\nu}{2}-1}J_\nu(2\sqrt{px})F(x)\,dx$
9.59	$\varphi(ae^t-a)$, $a>0$	$\frac{p}{\Gamma(p+1)}\int_0^\infty e^{-x}x^p F\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{x}$
9.60	$\varphi(a\,\mathrm{sh}\,t)$, $a>0$	$p\int_0^\infty J_p(ax)\,F(x)\frac{dx}{x}$
9.61	$\int_0^t\left(\frac{t-\tau}{a\tau}\right)^\nu J_{2\nu}[2(at\tau-a\tau^2)^{\frac{1}{2}}]\,\varphi(\tau)\,d\tau$	$\frac{p^{-2\nu}}{p+\frac{a}{p}}F\left(p+\frac{a}{p}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$
9.62	$\int_0^t \left(\frac{t-\tau}{t+\tau}\right)^{\nu} J_{2\nu}\left[(t^2-\tau^2)^{\frac{1}{2}}\right] \varphi(\tau)\, d\tau$	$\frac{p}{p^2+1} \frac{1}{(\sqrt{p^2+1}+p)^{2\nu}} F(\sqrt{p^2+1})$

§ 2. Fonctions rationnelles et irrationnelles

n°	$f(t)$	$F(p)$
9.63	1	1
9.64	t^n	$n!\, p^{-n}$
9.65	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < b, \\ t^n & \text{pour } t > b \end{cases}$	$e^{-bp} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!} \frac{b^m}{p^{n-m}}$
9.66	$\begin{cases} t^n & \text{pour } 0 < t < b, \\ 0 & \text{pour } t > b \end{cases}$	$\frac{n!}{p^n} - e^{-bp} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!} \frac{b^m}{p^{n-m}}$
9.67	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < b \\ \frac{1}{t+a} & \text{pour } t > b, \end{cases}$ $\lvert \arg (a+b) \rvert < \pi$	$-e^{ap}\, p\mathrm{Ei}\,[-(a+b)\,p]$
9.68	$\frac{1}{(t+a)^n}$, $n \geqslant 2$, $\lvert \arg a \rvert < \pi$	$-\sum_{m=1}^{n-1} \frac{(m-1)!}{(n-1)!} \frac{(-p)^{n-m}}{a^m} + \frac{(-p)^n}{(n-1)!} e^{ap}\, \mathrm{Ei}\,(-ap)$
9.69	$\begin{cases} 0 & \text{pour } t < \alpha, \\ -\frac{1}{t} & \text{pour } t > \alpha, \end{cases}$ $\alpha > 0$	$p\mathrm{Ei}\,(-\alpha p)$

9.70	$\dfrac{1}{(t+\alpha)^2}, \quad \alpha>0$	$p\left[\dfrac{1}{\alpha}+pe^{\alpha p}\,\mathrm{Ei}\,(-\alpha p)\right]$
9.71	$\begin{cases} 0 & \text{pour } t<\alpha, \\ \dfrac{\alpha}{t^2} & \alpha>0 \\ & \text{pour } t>\alpha, \end{cases}$	$p\,[e^{-\alpha p}+\alpha p\mathrm{Ei}\,(-\alpha p)]$
9.72	$\dfrac{1}{t^2+1}$	$-p\,[\sin p\,\mathrm{ci}\,(p)+\cos p\,\mathrm{si}\,(p)]$
9.73	$\dfrac{1}{t^2-a^2}(At+Ba), \quad \lvert\arg(\pm a)\rvert<\pi$	$-\dfrac{A-B}{2}pe^{ap}\,\mathrm{Ei}\,(-ap)-\dfrac{A+B}{2}pe^{-ap}\,\mathrm{Ei}\,(ap)$
9.74	$\dfrac{1}{t^2+a^2}(At+Ba), \quad \lvert\arg(\pm ia)\rvert<\pi$	$(A\cos ap-B\sin ap)\,p\,\mathrm{ci}\,(ap)-(A\sin ap+B\cos ap)\times$ $\times\ p\,\mathrm{si}\,(ap)$
9.75	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<b, \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \text{pour } t>b \end{cases}$	$\sqrt{\pi p}\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{bp})$
9.76	$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \text{pour } 0<t<b, \\ 0 & \text{pour } t>b \end{cases}$	$\sqrt{\pi p}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{bp})$
9.77	$\dfrac{1}{\sqrt{t+a}}, \quad \lvert\arg a\rvert<\pi$	$\sqrt{\pi p}\,e^{ap}\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{ap})$
9.78	$\dfrac{\sqrt{t}}{t+a}, \quad \lvert\arg a\rvert<\pi$	$\sqrt{\pi p}-\pi\sqrt{a}\,pe^{ap}\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{ap})$
9.79	$\dfrac{1+2at}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}\,(p+a)$
9.80	$\dfrac{1}{\sqrt{t}\,(t+a)}, \quad \lvert\arg a\rvert<\pi$	$\dfrac{\pi}{\sqrt{a}}\,pe^{ap}\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{ap})$
9.81	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<b, \\ \dfrac{t}{\sqrt{t^2-b^2}} & \text{pour } t>b \end{cases}$	$bpK_1\,(bp)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.82	$\dfrac{t+a}{\sqrt{t^2+2at}}, \ \lvert \arg a \rvert < \pi$	$ape^{ap} K_1(ap)$
9.83	$\begin{cases} \dfrac{b-t}{\sqrt{2bt-t^2}} & \text{pour } 0<t<2b, \\ 0 & \text{pour } t>2b \end{cases}$	$\pi bpe^{-bp} I_1(bp)$
9.84	$(t+\sqrt{1+t^2})^n + (t-\sqrt{1+t^2})^n$	$2pO_n(p)$
9.85	$\dfrac{(t+\sqrt{1+t^2})^n}{\sqrt{1+t^2}}$	$\dfrac{p}{2}[S_n(p) - \pi E_n(p) - \pi Y_n(p)$
9.86	$\dfrac{(t-\sqrt{1+t^2})^n}{\sqrt{1+t^2}}$	$-\dfrac{p}{2}[S_n(p) + \pi E_n(p) + \pi Y_n(p)]$
9.87	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ 1 & \text{pour } a<t<b, \\ 0 & \text{pour } t>b \end{cases}$	$e^{-ap} - e^{-bp}$
9.88	$\begin{cases} 1 \text{ pour } (2n-1)b<t<2nb, \\ 0 \text{ pour } 2nb<t<(2n+1)b \end{cases}$	$\dfrac{1}{e^{bp}+1}$
9.89	$\begin{cases} 0 \text{ pour } (4n-1)b<t<(4n+1)b, \\ 2 \text{ pour } (4n+1)b<t<(4n+3)b \end{cases}$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}(bp)}$
9.90	$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \text{ pour } (2n-1)b<t<2nb, \\ \dfrac{1}{2} \text{ pour } 2nb<t<(2n+1)b \end{cases}$	$\dfrac{1}{2}\operatorname{th}\left(\dfrac{bp}{2}\right)$
9.91	$n \text{ pour } nb<t<(n+1)b$	$\dfrac{1}{e^{bp}-1}$

9.92	$n+1$ pour $nb<t<(n+1)b$	$\frac{1}{1-e^{-bp}}$
9.93	$2n+1$ pour $2nb<t<2(n+1)b$	$\operatorname{cth}(bp)$
9.94	$\begin{cases} 0 \text{ pour } 0<t<b, \\ 2n \text{ pour } (2n-1)b<t<(2n+1)b \end{cases}$	$\frac{1}{\operatorname{sh}(bp)}$
9.95	n pour $b\pi^2n^2<t<b\pi^2(n+1)^2$	$\frac{1}{2}[\vartheta_3(0,\ bp)-1]$
9.96	n pour $\ln n<t<\ln(n+1)$	$\zeta(p)$
9.97	$\sum\limits_{0\leqslant \ln n\leqslant t}(t-\ln n)^{a-1}$, $\operatorname{Re} a>0$	$\Gamma(a)\,p^{1-a}\zeta(p)$
9.98	$\frac{1-a^n}{1-a}$ pour $nb<t<(n+1)b$	$\frac{1}{e^{bp}-a}$, $b \operatorname{Re} p>\operatorname{Re}(\ln a)$
9.99	$\binom{n}{m}$ pour $nb<t<(n+1)b$	$\frac{e^{-bp}}{(e^{bp}-1)^m}$
9.100	n^m pour $nb<t<(n+1)b$	$\frac{1-e^{-bp}}{(-b)^m}\frac{d^m}{dp^m}\frac{1}{(1-e^{-bp})}$
9.101	$\begin{cases} t \text{ pour } 0<t<1, \\ 1 \text{ pour } t>1 \end{cases}$	$\frac{1-e^{-p}}{p}$
9.102	$\begin{cases} t \text{ pour } 0<t<1, \\ 2-t \text{ pour } 1<t<2, \\ 0 \text{ pour } t>2 \end{cases}$	$\frac{(1-e^{-p})^2}{p}$
9.103	$a(t-nb)$ pour $nb<t<(n+1)b$	$\frac{a(e^{bp}-bp-1)}{p(e^{bp}-1)}$
9.104	$\frac{1-a^n}{1-a}t-b\frac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}}{(1-a)^2}$ pour $nb<t<(n+1)b$	$\frac{1}{p(e^{bp}-a)}$, $b \operatorname{Re} p>\operatorname{Re}(\ln a)$
9.105	$(2n+1)t-2bn(n+1)$ pour $2nb<t<2(n+1)b$	$\frac{1}{p}\operatorname{cth}(bp)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$
9.106	$b - (-1)^n (2bn + b - t)$ pour $2nb < t < 2(n+1)b$	$\frac{1}{p} th(bp)$
9.107	$\begin{cases} 0 \text{ pour } 0 < t < b, \\ t - (-1)^n (t - 2nb) \text{ pour } (2n-1)b < t < (2n+1)b, \\ n \geqslant 1 \end{cases}$	$\frac{1}{p} \frac{1}{\text{ch}(bp)}$
9.108	$\begin{cases} 0 \text{ pour } 0 < t < b, \\ 2n(t - bn) \text{ pour } (2n-1)b < t < (2n+1)b,\ n \geqslant 1 \end{cases}$	$\frac{1}{p} \frac{1}{\text{sh}(bp)}$
9.109	$\frac{1}{4}[1 - (-1)^n](2t - b) + \frac{1}{2}(-1)^n bn$ pour $nb < t < (n+1)b$	$\frac{1}{p(e^{bp}+1)}$
9.110	$\begin{cases} 0 \text{ pour } 0 < t < b, \\ nt - \frac{1}{2} bn(n+1) \text{ pour } nb < t < (n+1)b,\ n \geqslant 1 \end{cases}$	$\frac{1}{p(e^{bp}-1)}$
9.111	$\begin{cases} \frac{t^2}{2} \text{ pour } 0 < t < 1, \\ 1 - \frac{(t-2)^2}{2} \text{ pour } 1 < t < 2, \\ 1 \text{ pour } t > 2 \end{cases}$	$\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2}$
9.112	$\begin{cases} \frac{t^2}{2} \text{ pour } 0 < t < 1, \\ \frac{3}{4} - \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 \text{ pour } 1 < t < 2, \\ \frac{1}{2}(t-3)^2 \text{ pour } 2 < t < 3, \\ 0 \text{ pour } t > 3 \end{cases}$	$\frac{(1-e^{-p})^3}{p^2}$

9.113	$(t-nb)^2$ pour $nb<t<(n+1)b$	$\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}\,\frac{b^2+2bp}{e^{bp}-1}$
9.114	$\begin{cases} 0 \text{ pour } t<\alpha, \\ 1 \text{ pour } t>\alpha \end{cases}$	$e^{-\alpha p}$
9.115	$\begin{cases} (1+t)^{a-1} \text{ pour } t<b, \\ 0 \quad \text{ pour } t>b \end{cases}$	$p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L_k^{(a)}(p)}{k+1}\left(\frac{b}{1+b}\right)^{k+1}$
9.116	$\begin{cases} (1+t)^a \text{ pour } t<b<1, \\ 0 \quad \text{ pour } t>b \end{cases}$	$p\sum_{k=0}^{\infty}L_k^{(a-k)}(p)\frac{b^{k+1}}{k+1}$
9.117	$\varphi(t)=\begin{cases} -\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i \text{ pour } t<\lambda_0, \\ -\sum_{i=k+1}^{\infty}\alpha_i \text{ pour } \lambda_k<t<\lambda_{k+1}, \end{cases}$ $0\leqslant\lambda_k,\ k=0,1,2,\ldots$	$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k e^{-\lambda_k p}-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k$
9.118	$\begin{cases} 0 \text{ pour } t<\lambda_0, \\ \sum_{i=0}^{k}\alpha_i \text{ pour } \lambda_k<t<\lambda_{k+1} \end{cases}$	$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k e^{-\lambda_k p}$
9.119	$\begin{cases} 1 \text{ pour } (8k-7)a<t<(8k-5)a, \\ -1 \text{ pour } (8k-3)a<t<(8k-1)a, \\ 0 \text{ dans les autres cas, } k=1,2,3,\ldots;\ a>0 \end{cases}$	$\frac{\operatorname{sh} ap}{\operatorname{ch} 2ap}$
9.120	$\begin{cases} 0 \text{ pour } (8k-1)a<t<(8k+1)a \\ t-(8k+1)a \text{ pour } (8k+1)a<t<(8k+3)a, \\ 2a \text{ pour } (8k+3)a<t<(8k+5)a, \\ -t+(8k+7)a \\ \text{pour } (8k+5)a<t<(8k+7)a,\ k=0,1,2,\ldots;\ a>0 \end{cases}$	$\frac{\operatorname{sh} ap}{p\operatorname{ch} 2ap}$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$
9.121	$\begin{cases} 4k-2 \text{ pour } (4k-3)a<t<(4k-1)a, \\ -4k \text{ pour } (4k-1)a<t<(4k+1)a, \\ k=1,2,3,\ldots; a>0 \end{cases}$	$\dfrac{\operatorname{sh} ap}{\operatorname{ch}^2 ap}$
9.122	$2k-1$ pour $2(k-1)\alpha<t<2\alpha k$, $k=1,2,3,\ldots$; $\alpha>0$	$\operatorname{cth} \alpha p$
9.123	$\begin{cases} 2t \text{ pour } (4k-3)a<t<(4k-1)a, \\ 0 \text{ dans les autres cas, } k=1,2,\ldots; a>0 \end{cases}$	$\dfrac{1+ap\operatorname{th} ap}{p\operatorname{ch} ap}$
9.124	$\begin{cases} 0 \text{ pour } t<\alpha, \\ t^{\nu-1} \text{ pour } t>\alpha \end{cases}$	$\dfrac{1}{p^{\nu-1}}Q(\alpha p,\ \nu)$
9.125	$\dfrac{\alpha^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\dfrac{t^{\nu-1}}{t+\alpha}$, Re $\nu>0$, Re $\alpha>0$	$pe^{\alpha p}Q(\alpha p,\ \nu)$
9.126	$(t+\alpha)^{\nu-1}$, Re $\alpha>0$	$\dfrac{e^{\alpha p}}{p^{\nu-1}}Q(\alpha p,\ \nu)$
9.127	$\begin{cases} 0 \text{ pour } t<\alpha, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \text{ pour } t>\alpha \end{cases}$	$\sqrt{p}\operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha p})$
9.128	$\dfrac{1}{(1+t)^{\nu}}$	$pS(\nu,\ p)$
9.129	$\begin{cases} 1 \text{ pour } (2k)^2\pi^2<t<(2k+1)^2\pi^2, \\ -1 \text{ pour } (2k+1)^2\pi^2<t<(2k+2)^2\pi^2,\ k=0,1,2,\ldots \end{cases}$	$\vartheta_0(0,\ p)$
9.130	$\begin{cases} 1 \text{ pour } 0<t<\alpha, \\ -1 \text{ pour } \alpha<t<2\alpha, \\ 0 \text{ pour } t>2\alpha \end{cases}$	$(1-e^{-\alpha p})^2$

9.131	$\begin{cases} t \text{ pour } 0<t<\alpha, \\ 2\alpha-t \text{ pour } \alpha<t<2\alpha, \\ 0 \text{ pour } t>2\alpha \end{cases}$	$\dfrac{(1-e^{-\alpha p})^2}{p}$
9.132	$\begin{cases} 0 \text{ pour } 0<t<\alpha, \\ \dfrac{(t-\alpha)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \text{ pour } t>\alpha, \ \operatorname{Re}\nu>0 \end{cases}$	$\dfrac{e^{-\alpha p}}{p^{\nu-1}}$
9.133	$\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{t^2+\alpha^2}-\alpha)$	$\dfrac{e^{\alpha^2 p}}{\sqrt{p}} \operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{p})$
9.134	$\begin{cases} 0 \text{ pour } t<\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{\left((2t+\frac{1}{2})\right)^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\left(t-\frac{1}{4}\right)^{1+\frac{\nu}{2}}} \text{ pour } t>\dfrac{1}{4}, \ \operatorname{Re}\nu>0 \end{cases}$	$pD_\nu(\sqrt{p})$
9.135	$\dfrac{t^{\frac{\nu}{2}-1}}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)(1+t)^{\frac{\nu+1}{2}}}$, $\operatorname{Re}\nu>0$	$pe^{\frac{p}{2}} D_{-\nu}(\sqrt{2p})$
9.136	$\dfrac{t^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)(2t+1)^{\frac{\nu}{2}}}$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\sqrt{p}\, e^{\frac{p}{4}} D_{-\nu}(\sqrt{p})$
9.137	$\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}[(t+\sqrt{t^2+1})^n-(t-\sqrt{t^2+1})^n]$	$pS_n(p)$

Suite

nº	$f(t)$	$F(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$
9.138	$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi \sqrt{t(2-t)}} & \text{pour } t < 2, \\ 0 & \text{pour } t > 2 \end{cases}$	$pe^{-p} I_0(p)$
9.139	$\dfrac{2}{a\pi} \sqrt{2a(t-2ak)-(t-2ak)^2}$ pour $2ak < t < 2a(k+1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{I_1(ap)}{\text{sh}\, ap}$
9.140	$\begin{cases} \dfrac{(2\alpha t - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}}}{(2\alpha)^\nu \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} & \text{pour } t < 2\alpha, \\ 0 & \text{pour } t > 2\alpha, \end{cases}$ $\alpha > 0$, $\text{Re}\, \nu > -\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{p^{\nu-1}} e^{-\alpha p} I_\nu(\alpha p)$
9.141	$\dfrac{1}{\pi} \left(\dfrac{2}{a}\right)^\nu \dfrac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)} [2a(t-2ak)-(t-2ak)^2]^{\nu - \frac{1}{2}}$ pour $2ak < t < 2a(k+1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $a > 0$, $\text{Re}\, \nu > -\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{I_\nu(ap)}{p^{\nu-1}\, \text{sh}\, ap}$
9.142	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}} & \text{pour } t > 1 \end{cases}$	$pK_0(p)$
9.143	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < \alpha, \\ \dfrac{\sqrt{\pi}\, (t^2 - \alpha^2)^{\nu - \frac{1}{2}}}{(2\alpha)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} & \text{pour } t > \alpha, \ \text{Re}\, \nu > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$	$\dfrac{1}{p^{\nu-1}} K_\nu(\alpha p)$

9.144	$\dfrac{\sqrt{\pi}\,(t^2+2\alpha t)^{\nu-\frac{1}{2}}}{(2\alpha)^{\nu}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}, \quad \alpha>0, \ \operatorname{Re}\nu \geqslant -\frac{1}{2}$	$\dfrac{e^{\alpha p} K_{\nu}(\alpha p)}{p^{\nu-1}}$
9.145	$\begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}} & \text{pour } t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$p\,[I_0(p)-\mathbf{L}_0(p)]$
9.146	$\begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} & \text{pour } t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1, \quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2} \end{cases}$	$\dfrac{I_{\nu}(p)-\mathbf{L}_{\nu}(p)}{p^{\nu-1}}$
9.147	$\begin{cases} \dfrac{(2\alpha t-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{(2\alpha)^{\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} & \text{pour } t<\alpha, \\ -\dfrac{(2\alpha t-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{(2\alpha)^{\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} & \text{pour } \alpha<t<2\alpha, \\ 0 & \text{pour } t>2\alpha, \end{cases}$ $\alpha>0, \ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\dfrac{1}{p^{\nu-1}}\, e^{-\alpha p}\, \mathbf{L}_{\nu}(\alpha p)$
9.148	$\begin{cases} [2a(t-2ak)-(t-2ak)^2]^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 2ak<t<(2k+1)a, \\ -[2a(t-2ak)-(t-2ak)^2]^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } (2k+1)a<t<(2k+2)a, \end{cases}$ $k=0, 1, 2, \ldots; \ a>0; \ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^{\nu} \dfrac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)}\, \dfrac{1}{p^{\nu-1}\operatorname{sh} ap}\, \mathbf{L}_{\nu}(ap)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.149	$\begin{cases} 0 \quad \text{pour } t<\frac{1}{2}, \\ \frac{2^{\nu+1}\Gamma(\nu)}{\pi\Gamma(2\nu)}\left[\frac{3}{4}+t-k-(t-k^2)\right]^{\nu-\frac{1}{2}} \\ \text{pour } \frac{2k+1}{2}<t<\frac{2k+3}{3},\ k=0, 1, 2, \ldots;\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2} \end{cases}$	$\frac{I_\nu(p)-\mathbf{L}_\nu(p)}{p^{\nu-1}\operatorname{sh}\frac{p}{2}}$
9.150	$[t(t-2i)]^{\nu-\frac{1}{2}},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{i\pi\Gamma(2\nu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{p^{\nu-1}}H_\nu^{(1)}(p)\,e^{-ip}$
9.151	$[t(t+2i)]^{\nu-\frac{1}{2}},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{\pi\Gamma(2\nu+1)}{i2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{p^{\nu-1}}H_\nu^{(2)}(p)\,e^{ip}$
9.152	$\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$	$\frac{\pi}{2}p\,[\mathbf{H}_0(p)-Y_0(p)]$
9.153	$\frac{t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}$	$\frac{\pi}{2}p\,[\mathbf{H}_1(p)-Y_1(p)]$
9.154	$\frac{1}{(\sqrt{t^2+1})^{2\nu+1}},\ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$	$\frac{\pi\sqrt{\pi}p^{\nu+1}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\cos(\nu\pi)}[\mathbf{H}_{-\nu}(p)-Y_{-\nu}(p)]$
9.155	$\begin{cases} 0 \quad \text{pour } t<\frac{1}{2}, \\ \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^{\mu-k-\frac{1}{2}}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{-\mu-k+\frac{1}{2}}} \quad \text{pour } t>\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\left(\mu+\frac{1}{2}-k\right)>0 \end{cases}$	$\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-k\right)}{p^{\mu-\frac{1}{2}}}W_{k,\mu}(p)$

9.156	$t^{\mu-k-\frac{1}{2}}(1+t)^{\mu+k-\frac{1}{2}}$, $\operatorname{Re}\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)>0$	$\dfrac{\Gamma\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)e^{\frac{p}{2}}}{p^{\mu-\frac{1}{2}}}W_{k,\mu}(p)$
9.157	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<b, \\ t^{\nu} & \text{pour } t>b \end{cases}$	$\dfrac{\Gamma(\nu+1, bp)}{p^{\nu}}$
9.158	$\begin{cases} t^{\nu} & \text{pour } 0<t<b, \\ 0 & \text{pour } t>b, \ \operatorname{Re}\nu>-1 \end{cases}$	$\dfrac{\gamma(\nu+1, bp)}{p^{\nu}}$
9.159	$(t+a)^{\nu}$, $\|\arg a\|<\pi$	$\dfrac{e^{ap}\,\Gamma(\nu+1, ap)}{p^{\nu}}$
9.160	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<b, \\ (t-b)^{\nu} & \text{pour } t>b, \ \operatorname{Re}\nu>-1 \end{cases}$	$\dfrac{\Gamma(\nu+1)\,e^{-bp}}{p^{\nu}}$
9.161	$\begin{cases} (b-t)^{\nu} & \text{pour } 0<t<b, \\ 0 & \text{pour } t>b, \ \operatorname{Re}\nu>-1 \end{cases}$	$\dfrac{e^{-bp}\gamma(\nu+1, -bp)}{p^{\nu}}$
9.162	$\dfrac{t^{\nu}}{t+a}$, $\|\arg a\|<\pi$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\Gamma(\nu+1)\,a^{\nu}\,pe^{ap}\,\Gamma(-\nu, ap)$
9.163	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<b, \\ \dfrac{(t-b)^{\nu}}{t} & \text{pour } t>b, \ \operatorname{Re}\nu>-1 \end{cases}$	$\Gamma(\nu+1)\,b^{\nu}\,p\Gamma(-\nu, bp)$
9.164	$\dfrac{t^{\nu-1}}{t^2+1}$, $\operatorname{Re}\nu>0$	$\pi\operatorname{cosec}(\pi\nu)\,pV_{\nu}(2p, 0)$
9.165	$(1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$	$2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)p^{1-\nu}[\mathbf{H}_{\nu}(p)-Y_{\nu}(p)]$
9.166	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<b, \\ (t^2-b^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } t>b, \ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2} \end{cases}$	$\dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2b)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,p^{\nu-1}}K_{\nu}(bp)$

Suite

nº	$f(t)$	$F(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$
9.167	$\begin{cases}(a^2-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<a,\\ 0 & \text{pour } t>a,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\end{cases}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2a)^\nu}{2p^{\nu-1}}[I_\nu(ap)-\mathbf{L}_\nu(ap)]$
9.168	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<a,\\ (t-a)^{\nu-1}(t+a)^{-\nu+\frac{1}{2}} & \text{pour } t>a,\ \operatorname{Re}\nu>0\end{cases}$	$2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)\sqrt{p}D_{1-2\nu}(2\sqrt{ap})$
9.169	$(\sqrt{t^2+1}+t)^\nu$	$S_{1,\nu}(p)+\nu S_{0,\nu}(p)$
9.170	$(\sqrt{t^2+1}-t)^\nu$	$S_{1,\nu}(p)-\nu S_{0,\nu}(p)$
9.171	$\dfrac{(\sqrt{t^2+1}+t)^\nu}{\sqrt{t^2+1}}$	$\pi\operatorname{cosec}(\pi\nu)\,p\,[\mathbf{J}_{-\nu}(p)-J_{-\nu}(p)]$
9.172	$(\sqrt{t+2a}+\sqrt{t})^{2\nu}-(\sqrt{t+2a}-\sqrt{t})^{2\nu}$, $\lvert\arg a\rvert<\pi$	$2^{\nu+1}\nu a^\nu e^{ap}K_\nu(ap)$
9.173	$\dfrac{(1+\sqrt{t^2+1})^{\nu+\frac{1}{2}}}{t^{\nu+1}\sqrt{t^2+1}}$, $\operatorname{Re}\nu<0$	$\sqrt{2}\,\Gamma(-\nu)\,pD_\nu(\sqrt{2ip})\,D_\nu(\sqrt{-2ip})$, $\operatorname{Re}p\geqslant 0$
9.174	$\dfrac{(2a)^{2\nu}(t+\sqrt{t^2+4a^2})^{2\nu}}{\sqrt{t^3+4a^2t}}$, $\operatorname{Re}\nu>0$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}p^{\frac{3}{2}}[J_{\nu+\frac{1}{4}}(ap)\,Y_{\nu-\frac{1}{4}}(ap)-J_{\nu-\frac{1}{4}}(ap)\,Y_{\nu+\frac{1}{4}}(ap)]$
9.175	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<1,\\ \dfrac{\{(t+\sqrt{t^2-1})^{2\nu}+(t-\sqrt{t^2-1})^{2\nu}\}}{\sqrt{t}\sqrt{(t^2-1)}} & \text{pour } t>1\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,p^{\frac{3}{2}}K_{\nu+\frac{1}{4}}\left(\frac{p}{2}\right)K_{\nu-\frac{1}{4}}\left(\frac{p}{2}\right)$
9.176	$\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}(1-t)^{\beta-\alpha-1}t^{\alpha-1} & \text{pour } t<1,\\ 0 & \text{pour } t>1,\ \operatorname{Re}\beta>\operatorname{Re}\alpha>0\end{cases}$	$p\,{}_1F_1(\alpha;\beta;-p)$

9.177	$t^{\nu-1} e^{-at}$, Re $\nu > 0$	$\dfrac{\Gamma(\nu)\, p}{(p+a)^{\nu}}$, Re $p > -$Re a
9.178	$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$	$p \ln(p+b) - p \ln(p+a)$, Re $p > -$Re a, $-$Re b
9.179	$\dfrac{1}{1+e^{-t}}$	$\dfrac{p}{2}\psi\left(\dfrac{p+1}{2}\right) - \dfrac{p}{2}\psi\left(\dfrac{p}{2}\right)$
9.180	$\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right)^{\nu-1}$, Re $a > 0$, Re $\nu > 0$	$ap\, \mathrm{B}(ap, \nu)$
9.181	$\dfrac{t^{n}}{1-e^{-\frac{t}{a}}}$, Re $a > 0$	$(-a)^{n+1} p \psi^{(n)}(ap)$
9.182	$\dfrac{t^{\nu-1}}{1-e^{-\frac{t}{a}}}$, Re $\nu > 1$	$a^{\nu}\, \Gamma(\nu)\, p \zeta(\nu, ap)$
9.183	$\dfrac{1-e^{-at}}{1-e^{-t}}$	$p\psi(p+a) - p\psi(p)$
9.184	$\dfrac{1-e^{-at}}{t(1+e^{-t})}$	$p \ln \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{p}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{a+p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{a+p}{2}\right)}$
9.185	$\dfrac{(a+\sqrt{1-e^{-t}})^{-\nu}+(a-\sqrt{1-e^{-t}})^{-\nu}}{\sqrt{1-e^{-t}}}$	$2^{p+1} e^{(p-\nu)i\pi} \dfrac{\Gamma(p)}{\Gamma(\nu)}\, p\, (a^{2}-1)^{\frac{p-\nu}{2}}\, Q_{p-1}^{\nu-p}(a)$
9.186	$t e^{-\frac{t^{2}}{4a}}$, Re $a > 0$	$2ap - 2\sqrt{\pi}\, a^{\frac{3}{2}} p^{2} e^{ap^{2}}\, \mathrm{erfc}(\sqrt{a}\, p)$
9.187	$\dfrac{e^{-\frac{t^{2}}{4a}}}{\sqrt{t}}$, Re $a > 0$	$\sqrt{a}\, p \sqrt{p}\, e^{\frac{ap^{2}}{2}} K_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{ap^{2}}{2}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.188	$t^{\nu-1} e^{-\frac{t^2}{8a}}$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\Gamma(\nu)\, 2^\nu a^{\frac{\nu}{2}} p e^{ap^2} D_{-\nu}(2\sqrt{a}\,p)$
9.189	$e^{-\frac{a}{4t}}$, $\operatorname{Re} a \geqslant 0$	$\sqrt{ap}\, K_1(\sqrt{ap})$
9.190	$\frac{e^{-\frac{a}{4t}}}{\sqrt{t}}$, $\operatorname{Re} a \geqslant 0$	$\sqrt{\pi p}\, e^{-\sqrt{ap}}$
9.191	$t^{\nu-1} e^{-\frac{a}{4t}}$, $\operatorname{Re} a > 0$	$2p\left(\frac{a}{4p}\right)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu(\sqrt{ap})$
9.192	$(2t)^{\nu-1} e^{-2\sqrt{at}}$, $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\Gamma(2\nu)\, p^{1-\nu} e^{\frac{a}{2p}} D_{-2\nu}\left(\sqrt{\frac{2a}{p}}\right)$
9.193	$\exp(-ae^{-t})$	$pa^{-p}\gamma(p, a)$
9.194	$\exp(-ae^{t})$, $\operatorname{Re} a > 0$	$pa^p\,\Gamma(-p, a)$
9.195	$(1-e^{-t})^{\nu-1} \exp(ae^{-t})$, $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(p)}{\Gamma(\nu+p)}\, pa^{-\frac{\nu+p}{2}} e^{\frac{a}{2}} M_{\frac{\nu-p}{2},\, \frac{\nu+p-1}{2}}(a)$
9.196	$(1-e^{-t})^{\nu-1} \exp(-ae^{t})$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\Gamma(\nu)\, pe^{-\frac{a}{2}} a^{\frac{p-1}{2}} W_{\frac{1-p}{2}-\nu,\, -\frac{p}{2}}(a)$
9.197	$e^{\sqrt{t}} - 1$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{e^{\frac{1}{4p}}}{\sqrt{p}}\operatorname{erfc}\left(-\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)$
9.198	$\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\,\frac{t^n}{n!}\right)$	$p^{n+1} e^{\frac{p^2}{4}} D_{-n-1}(p)$

9.199	$(1-e^{-\sqrt{t}})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{\frac{1}{4p}}}{\sqrt{p}}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)$
9.200	$\sqrt{t}\exp\left(-2\sqrt{\frac{t}{a}}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{p^3}}+\frac{a}{2\sqrt{p}}\right)\exp\left(\frac{1}{ap}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{ap}}\right)-\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{a}}$
9.201	$\frac{\exp\left(-bt-2\sqrt{\frac{t}{a}}\right)}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{p}{\sqrt{p+b}}\exp\left[\frac{1}{a(p+b)}\right]\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{\sqrt{a(p+b)}}\right]$
9.202	$\ln t$	$-\ln(\gamma p)$
9.203	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<b,\\ \ln t & \text{pour } t>b\end{cases}$	$e^{-bp}\ln b-\operatorname{Ei}(-bp)$
9.204	$\ln(1+at),\ \lvert\arg a\rvert<\pi$	$-e^{\frac{p}{a}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{p}{a}\right)$
9.205	$\ln(t+a),\ \lvert\arg a\rvert<\pi$	$\ln a-e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap)$
9.206	$t^n\ln t$	$\frac{n!}{p^n}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(\gamma p)\right]$
9.207	$t^{\nu-1}\ln t,\ \operatorname{Re}\nu>0$	$\Gamma(\nu)\,p^{1-\nu}[\psi(\nu)-\ln p]$
9.208	$(\ln t)^2$	$\frac{\pi^2}{6}+[\ln(\gamma p)]^2$
9.209	$\ln(t^2+a^2)$	$2[\ln a-\operatorname{ci}(ap)\cos(ap)-\operatorname{si}(ap)\sin(ap)]$
9.210	$\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{t+2a}}{\sqrt{2a}},\ \lvert\arg a\rvert<\pi$	$\frac{1}{2}e^{ap}K_0(ap)$
9.211	$\frac{1}{t}[\ln(t^2+a^2)-\ln a^2]$	$p[\operatorname{ci}(ap)]^2+p[\operatorname{si}(ap)]^2$
9.212	$\frac{\ln(1-t^2)}{t}$	$p\operatorname{Ei}(p)\operatorname{Ei}(-p)$
9.213	$\ln\sqrt{1+t^2}$	$-\cos p\operatorname{ci}(p)-\sin p\operatorname{si}(p)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p)=p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.214	$\begin{cases} 0 & \text{pour } t<\alpha, \\ \dfrac{\ln t}{\alpha+t} & \text{pour } t>\alpha, \end{cases} \quad \alpha>0$	$pe^{\alpha p}\,[\mathrm{Ei}^2(-\alpha p)-\ln\alpha\,\mathrm{Ei}(-2\alpha p)]$
9.215	$\begin{cases} 0 & \text{pour } t<\alpha, \\ \dfrac{\ln t-\ln\alpha}{t+\alpha} & \text{pour } t>\alpha, \end{cases} \quad \alpha>0$	$pe^{\alpha p}\,\mathrm{Ei}^2(-\alpha p)$
9.216	$\begin{cases} \ln\alpha & \text{pour } t<\alpha, \\ \ln t & \text{pour } t>\alpha, \end{cases} \quad \alpha>0$	$-\mathrm{Ei}(-\alpha p)+\ln\alpha$
9.217	$\begin{cases} \ln\dfrac{t}{\alpha} & \text{pour } t<\alpha, \\ 0 & \text{pour } t>\alpha, \end{cases} \quad \alpha>0$	$\mathrm{Ei}(-\alpha p)-\ln\alpha p-C$
9.218	$\ln\dfrac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}}{t}$	$-\omega'(p)$
9.219	$\psi(1)-\ln(e^{at}-1)$	$\psi\left(\dfrac{p}{a}\right)$
9.220	$\ln^2 t-\dfrac{\pi^2}{6}$	$(\ln p+C)^2$
9.221	$\dfrac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\,[\psi(\nu)-\ln t],\ \mathrm{Re}\,\nu>0$	$\dfrac{\ln p}{p^{\nu-1}}$

§ 4. Fonctions trigonométriques et hyperboliques et leurs inverses

9.222	$\sin(at)$	$\dfrac{ap}{p^2+a^2}$

9.223	$\cos(at)$	$\dfrac{p^2}{p^2+a^2}$
9.224	$\lvert\sin(at)\rvert,\ a>0$	$\dfrac{ap}{p^2+a^2}\operatorname{cth}\dfrac{\pi p}{2a}$
9.225	$\lvert\cos(at)\rvert,\ a>0$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}\left[p+a\operatorname{csch}\dfrac{\pi p}{2a}\right]$
9.226	$\sin^{2n}(at)$	$\dfrac{(2n)!\,a^{2n}}{[p^2+(2a)^2][p^2+(4a)^2]\ldots[p^2+(2na)^2]},\ \operatorname{Re} p>2n\lvert\operatorname{Im} a\rvert$
9.227	$\cos^{2n}(at)$	$\dfrac{(2n)!\,a^{2n}}{[p^2+(2a)^2][p^2+(4a)^2]\ldots[p^2+(2na)^2]}\left\{1+\dfrac{p^2}{2!\,a^2}+\dfrac{p^2[p^2+(2a)^2]}{4!\,a^4}+\ldots+\dfrac{p^2(p^2+4a^2)\ldots[p^2+4(na-a)^2]}{(2n)!\,a^{2n}}\right\},$ $\operatorname{Re} p>2n\lvert\operatorname{Im} a\rvert$
9.228	$\sin^{2n+1}(at)$	$\dfrac{p(2n+1)!\,a^{2n+1}}{(p^2+a^2)[p^2+(3a)^2]\ldots\{p^2+[(2n+1)a]^2\}},$ $\operatorname{Re} p>(2n+1)\lvert\operatorname{Im} a\rvert$
9.229	$\cos^{2n+1}(at)$	$\dfrac{p^2(2n+1)!\,a^{2n}}{(p^2+a^2)[p^2+(3a)^2]\ldots[p^2+(2na+a)^2]}\times$ $\times\left\{1+\dfrac{p^2+a^2}{3!\,a^2}+\dfrac{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}{5!\,a^4}+\ldots+\dfrac{(p^2+a^2)[p^2+(3a)^2]\ldots[p^2+(2na-a)^2]}{(2n+1)!\,a^{2n}}\right\},$ $\operatorname{Re} p>(2n+1)\lvert\operatorname{Im} a\rvert$
9.230	$t^{\nu-1}\sin(at),\ \operatorname{Re}\nu>-1$	$\dfrac{i\Gamma(\nu)}{2}p[(p+ia)^{-\nu}-(p-ia)^{-\nu}]$
9.231	$t^{\nu-1}\cos(at),\ \operatorname{Re}\nu>-0$	$\dfrac{\Gamma(\nu)}{2}p[(p-ia)^{-\nu}+(p+ia)^{-\nu}]$
9.232	$(1-e^{-t})^{\nu-1}\sin(at),\ \operatorname{Re}\nu>-1$	$\dfrac{ip}{2}\mathrm{B}(\nu,\ p+ia)-\dfrac{ip}{2}\mathrm{B}(\nu,\ p-ia)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$
9.233	$(1-e^{-t})^{\nu-1}\cos(at)$, $\operatorname{Re}\nu>0$	$\frac{p}{2}\mathrm{B}(\nu,\ p-ia)+\frac{p}{2}\mathrm{B}(\nu,\ p+ia)$
9.234	$t^{\nu-1}e^{-\frac{t^2}{2a}}\sin(bt)$, $\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{ip}{2}\Gamma(\nu)a^{\frac{\nu}{2}}e^{\frac{a(p^2-b^2)}{4}}\{e^{\frac{ab}{2}ip}D_{-\nu}[\sqrt{a}(p+ib)]-e^{-\frac{ab}{2}ip}\times$ $\times D_{-\nu}[\sqrt{a}(p-ib)]\}$
9.235	$t^{\nu-1}e^{-\frac{t^2}{2a}}\cos(bt)$, $\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}\nu>0$	$\frac{\Gamma(\nu)a^{\frac{\nu}{2}}}{2}pe^{\frac{a}{4}(p^2-b^2)}\{e^{-\frac{ab}{2}ip}D_{-\nu}[\sqrt{a}(p-ib)]+$ $+e^{\frac{ab}{2}ip}D_{-\nu}[\sqrt{a}(p+ib)]\}$
9.236	$t^{\nu-1}\ln t\sin(at)$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\Gamma(\nu)p(p^2+a^2)^{-\frac{\nu}{2}}\sin\left[\nu\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{p}\right)\right]\times$ $\times\left\{\psi(\nu)-\ln\sqrt{p^2+a^2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{p}\right)\operatorname{cotg}\left[\nu\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{p}\right)\right]\right\}$
9.237	$t^{\nu-1}\ln t\cos(at)$, $\operatorname{Re}\nu>0$	$\frac{\Gamma(\nu)p}{(p^2+a^2)^{\frac{\nu}{2}}}\cos\left[\nu\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{p}\right)\right]\{\psi(\nu)-\ln\sqrt{p^2+a^2}-$ $-\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{p}\right)\operatorname{tg}\left[\nu\operatorname{arctg}\left[\frac{a}{p}\right)\right]\right\}$
9.238	$t^{\nu-1}\sin(\sqrt{2at})$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$2^{-\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\sec(\pi\nu)p^{1-\nu}e^{-\frac{a}{4p}}\left[D_{2\nu-1}\left(-\sqrt{\frac{a}{p}}\right)-\right.$ $\left.-D_{2\nu-1}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)\right]$

9.239	$t^{\nu-1}\cos(\sqrt{2at})$, $\operatorname{Re}\nu>0$	$2^{-\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,\operatorname{cosec}(\pi\nu)\,p^{1-\nu}e^{-\frac{a}{4p}}\left[D_{2\nu-1}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)+D_{2\nu-1}\left(-\sqrt{\frac{a}{p}}\right)\right]$
9.240	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<b,\\ \sin[a\sqrt{t^2-b^2}] & \text{pour } t>b\end{cases}$	$abK_1(bp)$
9.241	$\sin(ae^{-t})$	$pa^{-p}\Gamma(p)[U_p(2a,0)\sin a-U_{p+1}(2a,0)\cos a]$
9.242	$\cos(ae^{-t})$	$pa^{-p}\Gamma(p)[U_p(2a,0)\cos a+U_{p+1}(2a,0)\sin a]$
9.243	$\sin[a(1-e^{-t})]$	$pa^{-p}\Gamma(p)U_{p+1}(2a,0)$
9.244	$\cos[a(1-e^{-t})]$	$pa^{-p}\Gamma(p)U_p(2a,0)$
9.245	$\frac{\sin[a\sqrt{1-e^{-t}}]}{\sqrt{e^t-1}}$	$\sqrt{\pi}\,p\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{a}\right)^p\mathbf{H}_p(a)$, $\operatorname{Re}p>-\frac{1}{2}$
9.246	$\frac{\cos(a\sqrt{1-e^{-t}})}{\sqrt{e^t-1}}$	$\sqrt{\pi}\,p\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{a}\right)^pJ_p(a)$, $\operatorname{Re}p>-\frac{1}{2}$
9.247	$\frac{\sin(a\sqrt{e^t-1})}{\sqrt{1-e^{-t}}}$, $a>0$	$\sqrt{\pi}\,p\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)\left(\frac{a}{2}\right)^p[I_p(a)-\mathbf{L}_{-p}(a)]$, $\operatorname{Re}p>-\frac{1}{2}$
9.248	$\frac{\cos(a\sqrt{e^t-1})}{\sqrt{1-e^{-t}}}$, $a>0$	$\frac{2\sqrt{\pi}\,p}{\left(p+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{a}{2}\right)^pK_p(a)$, $\operatorname{Re}p>-\frac{1}{2}$
9.249	$\sin(at)\sin(bt)$	$\frac{2abp^2}{[p^2+(a+b)^2][p^2+(a-b)^2]}$
9.250	$\cos(at)\cos(bt)$	$\frac{p^2(p^2+a^2+b^2)}{[p^2+(a+b)^2][p^2+(a-b)^2]}$
9.251	$\cos(at)\sin(bt)$	$\frac{bp(p^2-a^2+b^2)}{[p^2+(a+b)^2][p^2+(a-b)^2]}$
9.252	$\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}$	$1+\sum_{m=1}^{n}\frac{2p^2}{p^2+4m^2}$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.253	$\operatorname{tg} t \cdot \cos[(2n+1)t]$	$(2n+1)\dfrac{p}{p^2+(2n+1)^2} + 2p\sum_{m=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^m(2m+1)}{p^2+(2m+1)^2}$
2.254	$\dfrac{(2at\cos at - \sin at)\sin at}{t^2}$	$\dfrac{p^2}{4}\ln\left(1+\dfrac{4a^2}{p^2}\right)$
9.255	$\dfrac{at\cos at - \sin at}{t^2}$	$p^2 \operatorname{arctg}\dfrac{a}{p} - ap$
9.256	$[\operatorname{sh}(at)]^\nu$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$2^{-\nu-1}\dfrac{p}{a}\,\mathrm{B}\left(\dfrac{p}{2a}-\dfrac{\nu}{2},\ \nu+1\right)$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \nu a$
9.257	$[\operatorname{ch}(at)-1]^\nu$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -\dfrac{1}{2}$	$2^{-\nu}\dfrac{p}{a}\,\mathrm{B}\left(\dfrac{p}{a}-\nu,\ 2\nu+1\right)$
9.258	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<1, \\ \dfrac{2}{t}\operatorname{sh}(at) & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$-p\,\mathrm{Ei}(a-p) + p\,\mathrm{Ei}(-a-p)$
9.259	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<1, \\ \dfrac{2}{t}\operatorname{ch}(at) & \text{pour } t>1 \end{cases}$	$-p\,\mathrm{Ei}(a-p) - p\,\mathrm{Ei}(-a-p)$
9.260	$t^{\nu-1}\operatorname{sh}(at)$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\dfrac{\Gamma(\nu)}{2}\,p\,[(p-a)^{-\nu} - (p+a)^{-\nu}]$
9.261	$t^{\nu-1}\operatorname{ch}(at)$, $\operatorname{Re}\nu > 0$	$\dfrac{\Gamma(\nu)}{2}\,p\,[(p-a)^{-\nu} + (p+a)^{-\nu}]$
9.262	$t^{\nu-1}\operatorname{csch} t$, $\operatorname{Re}\nu > 1$	$2^{1-\nu}\Gamma(\nu)\,p\zeta\left(\nu,\ \dfrac{p+1}{2}\right)$, $\operatorname{Re} p > -1$

9.263	$t^{\nu-1}\operatorname{cth} t$, $\operatorname{Re}\nu>1$	$\Gamma(\nu)\, p\left[2^{1-\nu}\zeta\left(\nu, \frac{p}{2}\right)-\frac{1}{p^{\nu}}\right]$
9.264	$t^{\nu-1}(\operatorname{cth} t-1)$, $\operatorname{Re}\nu>1$	$2^{1-\nu}\Gamma(\nu)\, p\zeta\left(\nu, \frac{p}{2}+1\right)$
9.265	$e^{-a\operatorname{sh} t}$, $\operatorname{Re} a>0$	$\pi p\operatorname{cosec}(\pi p)\left[\mathbf{J}_p(a)-J_p(a)\right]$
8.266	$e^{-a\operatorname{ch} t}$, $\operatorname{Re} a>0$	$p\operatorname{cosec}(\pi p)\left[\int_0^{\pi} e^{a\cos\varphi}\cos(p\varphi)\, d\varphi-\pi I_p(a)\right]$
9.267	$\ln\operatorname{ch} t$	$\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{p}{4}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{p}{4}\right)\right]-\frac{1}{p}$
9.268	$\ln(\operatorname{sh} t)-\ln t$	$\ln\left(\frac{p}{2}\right)-\frac{1}{2p}-\psi\left(\frac{p}{2}\right)$
9.269	$\operatorname{sh} 2\sqrt{at}$	$\sqrt{\frac{\pi a}{p}}\, e^{\frac{a}{p}}$
9.270	$\operatorname{ch} 2\sqrt{at}$	$\sqrt{\frac{a\pi}{p}}\, e^{\frac{a}{p}}\operatorname{erf}\sqrt{\frac{a}{p}}+1$
9.271	$t^{\nu-1}\operatorname{sh}(\sqrt{2at})$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{\Gamma(2\nu)}{2^{\nu}}\, p^{1-\nu} e^{\frac{a}{4p}}\left[D_{-2\nu}\left(-\sqrt{\frac{a}{p}}\right)-D_{-2\nu}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)\right]$
9.272	$t^{\nu-1}\operatorname{ch}\sqrt{2at}$, $\operatorname{Re}\nu>0$	$\frac{\Gamma(2\nu)}{2^{\nu}}\, p^{1-\nu} e^{\frac{a}{4p}}\left[D_{-2\nu}\left(-\sqrt{\frac{a}{p}}\right)+D_{-2\nu}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)\right]$
9.273	$\frac{\operatorname{sh}\left[a\sqrt{1-e^{-t}}\right]}{\sqrt{e^{t}-1}}$	$\sqrt{\pi}\, p\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) 2^{p} a^{-p}\, \mathbf{L}_p(a)$
9.274	$\frac{\operatorname{ch}\left[a\left(\sqrt{1-e^{-t}}\right)\right]}{\sqrt{e^{t}-1}}$	$\sqrt{\pi}\, p\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) 2^{p} a^{-p} I_p(a)$
9.275	$\operatorname{th}\frac{\pi}{2}\sqrt{e^{2t}-1}$	$p2^{-p}\zeta(p-1)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.276	$\begin{cases} \arcsin t & \text{pour } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1 \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}[I_0(p) - \mathbf{L}_0(p)]$
9.277	$\operatorname{arccotg}\left(\frac{t}{a}\right)$	$\frac{\pi}{2} + \operatorname{ci}(ap)\sin(ap) + \operatorname{si}(ap)\cos(ap)$
9.278	$\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)$	$-\operatorname{ci}(ap)\sin(ap) - \operatorname{si}(ap)\cos(ap)$
9.279	$\frac{\cos\left[\nu \arccos\left(\frac{1}{1+t}\right)\right]}{\sqrt{t(t+1)(t+2)}}$	$\sqrt{\pi}\, pe^p D_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{2p})\, D_{-\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{2p})$
9.280	$\frac{\cos[\nu \arccos e^{-t}]}{\sqrt{1-e^{-2t}}}$	$\frac{\pi \cdot 2^{-p}}{\mathrm{B}\left(\frac{p+\nu+1}{2}, \frac{p-\nu+1}{2}\right)}$
9.281	$\operatorname{Arsh} t$	$\frac{\pi}{2}[\mathbf{H}_0(p) - Y_0(p)]$
9.282	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < a, \\ \operatorname{Arch}\left(\frac{t}{a}\right) & \text{pour } t > a \end{cases}$	$K_0(ap)$
9.283	$\operatorname{Arch}\left(1+\frac{t}{a}\right), \quad \lvert \arg a \rvert < \pi$	$e^{ap} K_0(ap)$
9.284	$t \operatorname{Arsh} t$	$\pi \frac{\mathbf{H}_0(p) - Y_0(p)}{2p} + \pi \frac{\mathbf{H}_1(p) - Y_1(p)}{2} - 1$
9.285	$\operatorname{sh}[(2n+1)\operatorname{Arsh} t]$	$pO_{2n+1}(p)$
9.286	$\operatorname{ch}(\nu \operatorname{Arsh} t)$	$S_{1,\nu}(p)$
9.287	$\operatorname{sh}(\nu \operatorname{Arsh} t)$	$\nu S_{0,\nu}(p)$

9.288	$\dfrac{\exp(-\nu \operatorname{Arsh} t)}{\sqrt{1+t^2}}$	$\pi \operatorname{cosec}(\pi\nu)\, p\,[\mathbf{J}_\nu(p) - J_\nu(p)]$
9.289	$\dfrac{\operatorname{sh}(\nu \operatorname{Arsh} t)}{\sqrt{1+t^2}}$	$\nu p S_{-1,\,\nu}(p)$
9.290	$\dfrac{\operatorname{ch}(\nu \operatorname{Arsh} t)}{\sqrt{1+t^2}}$	$p S_{0,\,\nu}(p)$
9.291	$\dfrac{\operatorname{ch}\left[\nu \operatorname{Arch}\left(1+\frac{t}{a}\right)\right]}{\sqrt{t^2+at}}, \quad \lvert \arg a \rvert < \pi$	$p e^{ap} K_\nu(ap)$
9.292	$\dfrac{\operatorname{ch}\left[2\nu \operatorname{Arch}\left(1+\frac{t}{2a}\right)\right]}{\sqrt{t(t+2a)(t+4a)}}, \quad \lvert \arg a \rvert < \pi$	$\dfrac{p\sqrt{p}}{\sqrt{2\pi}} e^{2ap} K_{\nu+\frac{1}{4}}(ap)\, K_{\nu-\frac{1}{4}}(ap)$
9.293	$\begin{cases} \operatorname{sh} at & \text{pour } \alpha < t < \beta, \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}\left[e^{-\alpha p}(a \operatorname{ch} \alpha a + p \operatorname{sh} \alpha a) - e^{-\beta p}(a \operatorname{ch} \beta a + {}\right.$ $\left. {} + p \operatorname{sh} \beta a)\right]$
9.294	$\begin{cases} \operatorname{ch} at & \text{pour } \alpha < t < \beta. \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}\left[e^{-\alpha p}(p \operatorname{ch} \alpha a + a \operatorname{sh} \alpha a) - e^{-\beta p} \times \right.$ $\left. \times (p \operatorname{ch} \beta a + a \operatorname{sh} \beta a)\right]$
2.295	$\begin{cases} \operatorname{sh}^2 at & \text{pour } \alpha < t < \beta, \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$	$\dfrac{pe^{-\alpha p}}{p^2-4a^2}\left[p \operatorname{sh}^2 \alpha a + \dfrac{2a^2}{p} + a \operatorname{sh} 2\alpha a\right] - \dfrac{pe^{-\beta p}}{p^2-4a^2} \times$ $\times \left[p \operatorname{sh}^2 \beta a + \dfrac{2a^2}{p} + a \operatorname{sh} 2\beta a\right]$
9.296	$\begin{cases} \operatorname{ch}^2 at & \text{pour } \alpha < t < \beta, \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$	$\dfrac{pe^{-\alpha p}}{p^2-4a^2}\left[p \operatorname{ch}^2 \alpha a - \dfrac{2a^2}{p} + a \operatorname{sh} 2\alpha a\right] - \dfrac{pe^{-\beta p}}{p^2-4a^2} \times$ $\times \left[p \operatorname{ch}^2 \beta a - \dfrac{2a^2}{p} + a \operatorname{sh} 2\beta a\right]$

§ 5. Fonctions cylindriques

n°	$f(t)$	$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.297	$J_\nu(at)$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\dfrac{a^\nu \cdot p}{\sqrt{p^2+a^2}\,(p+\sqrt{p^2+a^2})^\nu}$
9.298	$t^n J_n(at)$	$1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)\, a^n \cdot p\,(p^2+a^2)^{-n-\frac{1}{2}}$
9.299	$t^\nu J_\nu(at)$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\dfrac{2^\nu}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) a^\nu p\,(p^2+a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}$
9.300	$t^{\nu+1} J_\nu(at)$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\dfrac{2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) a^\nu\, p^2\,(p^2+a^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}$
9.301	$t^\mu J_\nu(at)$, $\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1$	$\Gamma(\mu+\nu+1)\,(p^2+a^2)^{-\frac{\mu+1}{2}}\, p\cdot P_\mu^{-\nu}\left(\dfrac{p}{\sqrt{p^2+a^2}}\right)$
9.302	$J_\nu(at)\,J_\nu(bt)$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\dfrac{p}{\pi\sqrt{ab}}\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{p^2+a^2+b^2}{2ab}\right)$
9.303	$J_\nu(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re}\nu > -2$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a\pi}{p}}\, e^{-\frac{a}{2p}}\left[I_{\frac{\nu-1}{2}}\left(\dfrac{a}{2p}\right) - I_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\dfrac{a}{2p}\right)\right]$
9.304	$t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$a^{\frac{\nu}{2}}\, p^{-\nu}\, e^{-\frac{a}{p}}$
9.305	$t^{\frac{\nu}{2}-1} J_\nu(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re}\nu > 0$	$a^{-\frac{\nu}{2}}\cdot p\gamma\left(\nu, \dfrac{a}{p}\right)$

9.306	$t^{\frac{\nu}{2}+n} J_\nu(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re} \nu+n>-1$	$n!\,a^{\frac{\nu}{2}} p^{-n-\nu} e^{-\frac{a}{p}} L_n^{(\nu)}\left(\frac{a}{p}\right)$
9.307	$t^{\mu-\frac{1}{2}} J_{2\nu}(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re}(\mu+\nu)>-\frac{1}{2}$	$\dfrac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{a}\,\Gamma(2\nu+1)} p^{1-\mu} e^{-\frac{a}{2p}} M_{\mu,\nu}\left(\frac{a}{p}\right)$
9.308	$t^{\mu-1} J_{2\nu}(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re}(\mu+\nu)>0$	$\dfrac{\Gamma(\mu+\nu)\,a^{\nu}}{\Gamma(2\nu+1)\,p^{\mu+\nu-1}}\, {}_1F_1\left(\mu+\nu;\ 2\nu+1;\ -\frac{a}{p}\right)$
9.309	$J_\nu(t) J_{2\nu}(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\dfrac{p\cdot e^{-\frac{ap}{p^2+1}}}{\sqrt{p^2+1}} J_\nu\left(\frac{a}{p^2+1}\right)$
9.310	$J_\nu(a\sqrt{t}) J_\nu(b\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$e^{-\frac{a^2+b^2}{4p}} I_\nu\left(\frac{ab}{2p}\right)$
9.311	$t^{\lambda-1} J_{2\mu}(2\sqrt{at}) J_{2\nu}(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re}(\lambda+\mu+\nu)>0$	$\dfrac{2\Gamma(\lambda+\mu+\nu)\,a^{\mu+\nu}}{\Gamma(2\mu+1)\,\Gamma(2\nu+1)\,p^{\lambda+\mu+\nu-1}}\, {}_3F_3\left(\mu+\nu+\frac{1}{2},\right.$ $\left.\mu+\nu+1,\ \lambda+\mu+\nu;\ 2\mu+1,\ 2\nu+1,\ 2\mu+2\nu+1;\ -\frac{4a}{p}\right)$
9.312	$t^{\mu} Y_\nu(at)$, $\operatorname{Re}(\mu\pm\nu)>-1$	$p(p^2+a^2)^{-\frac{\mu+1}{2}}\left[\Gamma(\mu+\nu+1)\operatorname{cotg}(\pi\nu) P_\mu^{-\nu}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}}\right)-\right.$ $\left.-\Gamma(\mu-\nu+1)\operatorname{cosec}(\pi\nu) P_\mu^{\nu}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}}\right)\right]$
9.313	$\frac{1}{\sqrt{t}} Y_{2\nu}(2\sqrt{at})$, $\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert<\frac{1}{2}$	$-\sqrt{\pi p}\, e^{-\frac{a}{2p}}\left[\operatorname{tg}(\pi\nu) I_\nu\left(\frac{a}{2p}\right)+\frac{1}{\pi}\sec(\pi\nu) K_\nu\left(\frac{a}{2p}\right)\right]$
9.314	$H_\nu^{(1)}(at)$, $\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert<1$	$\dfrac{i\operatorname{cosec}(\pi\nu)\,p}{\sqrt{p^2+a^2}}\left[e^{-i\nu\pi} a^{\nu}(p+\sqrt{p^2+a^2})^{-\nu}-\right.$ $\left.-a^{-\nu}(p+\sqrt{p^2+a^2})^{\nu}\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.315	$H_\nu^{(2)}(at)$, $\mid \mathrm{Re}\ \nu \mid < 1$	$\frac{i \operatorname{cosec}(\pi\nu)\cdot p}{\sqrt{p^2+a^2}}[a^{-\nu}(p+\sqrt{p^2+a^2})^\nu - e^{i\nu\pi} a^\nu \times \times (p+\sqrt{p^2+a^2})^{-\nu}]$
9.316	$t^{\mu-\frac{1}{2}} H_{2\nu}^{(1)}(\sqrt{at})$, $\mathrm{Re}(\mu\pm\nu) > -\frac{1}{2}$	$\frac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}\right)}{\pi\sqrt{a}\, e^{i\pi\nu+\frac{a}{2p}} p^{\mu-1}} W_{-\mu,\nu}\left(e^{-i\pi}\cdot\frac{a}{p}\right)$
9.317	$t^{\mu-\frac{1}{2}} H_{2\nu}^{(2)}(2\sqrt{at})$, $\mathrm{Re}(\mu\pm\nu) > -\frac{1}{2}$	$\frac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}\right)}{\pi\sqrt{a}\, e^{-i\pi\nu+\frac{a}{2p}}\cdot p^{\mu-1}} W_{-\mu,\nu}\left(e^{i\pi}\cdot\frac{a}{p}\right)$
9.318	$J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\mathrm{Re}\ \nu > -1$	$\frac{p}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\nu+1) D_{-\nu-1}(pe^{i\frac{\pi}{4}}) D_{-\nu-1}(pe^{-i\frac{\pi}{4}})$
9.319	$\frac{1}{t} J_\nu\left(\frac{1}{t}\right)$	$2pJ_\nu(\sqrt{2p})\, K_\nu(\sqrt{2p})$
9.320	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < b, \\ \frac{J_\nu(a\sqrt{t^2-b^2})}{\sqrt{t^2-b^2}} & \text{pour } t > b,\ \mathrm{Re}\ \nu > -1 \end{cases}$	$p\cdot I_{\frac{\nu}{2}}\left[\frac{b}{2}(\sqrt{p^2+a^2}-p)\right] K_{\frac{\nu}{2}}\left[\frac{b}{2}(\sqrt{p^2+a^2}+p)\right]$
9.321	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < b, \\ (t^2-b^2)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(a\sqrt{t^2-b^2}) & \text{pour } t > b,\ \mathrm{Re}\ \nu > -1 \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a^\nu b^{\nu+\frac{1}{2}} p\cdot(p^2+a^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} K_{\nu+\frac{1}{2}}(b\sqrt{p^2+a^2})$

9.322	$(t^2+bt)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu [a\sqrt{t^2+bt}]$, Re $\nu > -1$, $\lvert \arg b \rvert < \pi$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{2}\right)^\nu p\left(\frac{b}{\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} e^{\frac{bp}{2}} K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2}\sqrt{p^2+a^2}\right)$
9.323	$t^{\frac{\nu}{2}}(t+b)^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu (a\sqrt{t^2+bt})$, Re $\nu > -1$, $\lvert \arg b \rvert < \pi$	$\frac{a^\nu \cdot p}{\sqrt{p^2+a^2}}(p+\sqrt{p^2+a^2})^{-\nu} e^{\frac{b}{2}(p-\sqrt{p^2+a^2})}$
9.324	$t^{\frac{\nu}{2}-1}(t+1)^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu (a\sqrt{t^2+1})$, Re $\nu > 0$	$2^\nu a^{-\nu} p\gamma\left(\nu, \frac{\sqrt{p^2+a^2}-p}{2}\right)$
9.325	$(e^t-1)^\mu J_{2\nu}(2a\sqrt{e^t-1})$, $a>0$, Re $(\mu+\nu) > -1$	$\frac{a^{2\nu} p \mathrm{B}(\mu+\nu+1,\ p-\mu-\nu)}{\Gamma(2\nu+1)} {}_1F_2(\mu+\nu+1;\ \mu+\nu+1-p;$ $2\nu+1;\ a^2) + \frac{pa^{2p-2\mu}\Gamma(\mu+\nu-p)}{\Gamma(\nu-\mu+p+1)} {}_1F_2(p+1;$ $p+1+\nu-\mu,\ p+1-\mu-\nu;\ a^2)$, Re $p >$ Re $\mu - \frac{7}{4}$
9.326	$J_\nu(2a \operatorname{sh} t)$, Re $\nu > -1$, $a > 0$	$p \cdot I_{\frac{\nu+p}{2}}(a) K_{\frac{\nu-p}{2}}(a)$, Re $p > -\frac{1}{2}$
9.327	$\operatorname{csch}(t) J_\nu(a \operatorname{csch} t)$, $a>0$	$\frac{p\Gamma\left(\frac{p+\nu+1}{2}\right)}{a\Gamma(\nu+1)} W_{-\frac{p}{2}, \frac{\nu}{2}}(a) M_{\frac{p}{2}, \frac{\nu}{2}}(a)$, Re $p > -$Re $\nu - 1$
9.328	$\operatorname{cosec}\left(\frac{t}{2}\right) \exp\left(\frac{a-be^t}{e^t-1}\right) J_{2\nu}\left(\frac{\sqrt{ab}}{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}\right)$, Re $a > 0$, Re $b > 0$	$\frac{2p\Gamma\left(p+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{ab}\,\Gamma(2\nu+1)} e^{-\frac{a+b}{2}} W_{-p,\nu}(b) M_{p,\nu}(a)$, Re $p > -$Re $\nu - \frac{1}{2}$
9.329	$\frac{1}{t} Y_\nu\left(\frac{1}{t}\right)$	$2pY_\nu(\sqrt{2p}) K_\nu(\sqrt{2p})$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$
9.330	$\frac{1}{t}H_\nu^{(1)}\left(\frac{1}{t}\right)$	$2pH_\nu^{(1)}(\sqrt{2p})\,K_\nu(\sqrt{2p})$
9.331	$\frac{1}{t}H_\nu^{(2)}\left(\frac{1}{t}\right)$	$2pH_\nu^{(2)}(\sqrt{2p})\,K_\nu(\sqrt{2p})$
9.332	$I_\nu(at)$, $\mathrm{Re}\,\nu>-1$	$a^\nu\frac{p}{(p+\sqrt{p^2-a^2})^\nu\sqrt{p^2-a^2}}$
9.333	$\frac{I_\nu(t)}{\sqrt{t}}$, $\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,pQ_{\nu-\frac{1}{2}}(p)$
9.334	$t^\nu I_\nu(at)$, $\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{2^\nu a^\nu}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)p\cdot(p^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}$
9.335	$\frac{I_\nu(at)}{t}$, $\mathrm{Re}\,\nu>0$	$\frac{a^\nu}{\nu}\frac{p}{(p+\sqrt{p^2-a^2})^\nu}$
9.336	$t^{\nu+1}I_\nu(at)$, $\mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\frac{2^{\nu+1}a^\nu}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)p^2(p^2-a^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}$
9.337	$t^\mu I_\nu(at)$, $\mathrm{Re}\,(\mu+\nu)>-1$	$\Gamma(\mu+\nu+1)\,p\,(p^2-a^2)^{-\frac{\mu+1}{2}}P_\mu^{-\nu}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2-a^2}}\right)$
9.338	$t^{\mu-\frac{1}{2}}I_{\nu+\frac{1}{2}}(at)$, $\mathrm{Re}\,(\mu+\nu)>-1$	$\sqrt{\frac{2}{a\pi}}\frac{\sin(\pi\nu)}{\sin[\pi(\mu+\nu)]}\frac{p}{(\sqrt{p^2-a^2})^\mu}Q_\nu^\mu\left(\frac{p}{a}\right)$
9.339	$tI_0\left(\frac{at}{2}\right)I_1\left(\frac{at}{2}\right)$	$\frac{2p^2E\left(\frac{a}{p}\right)}{\pi a(p^2-a^2)}-\frac{2K\left(\frac{a}{p}\right)}{\pi a}$

9.340	$t^{\mu-\frac{1}{2}} I_{2\nu}(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -\frac{1}{2}$	$\dfrac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right) e^{\frac{a}{2p}}}{\sqrt{a}\,\Gamma(2\nu+1)\,p^{\mu-1}} M_{-\mu,\nu}\left(\frac{a}{p}\right)$
9.341	$I_\nu^2(\sqrt{2at})$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$e^{\frac{a}{p}} I_\nu\left(\frac{a}{p}\right)$
9.342	$I_\nu(\sqrt{2at})\, I_\nu(\sqrt{2bt})$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\exp\left(\frac{a+b}{2p}\right) I_\nu\left(\frac{1}{p}\sqrt{ab}\right)$
9.343	$K_\nu(at)$, $\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert < 1$	$\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}(\pi\nu)\dfrac{p}{\sqrt{p^2-a^2}}\left[\dfrac{(p+\sqrt{p^2-a^2})^\nu}{a^\nu} - \dfrac{a^\nu}{(p+\sqrt{p^2-a^2})^\nu}\right]$
9.344	$t^{\mu-\frac{1}{2}} K_{\nu+\frac{1}{2}}(at)$, $\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1$, $\operatorname{Re}(\mu-\nu) > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,\Gamma(\mu-\nu)\,\Gamma(\mu+\nu+1)\dfrac{p}{(\sqrt{p^2-a^2})^\mu} P_\nu^{-\mu}\left(\frac{p}{a}\right)$ $(\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a)$
9.345	$t^\mu K_\nu(at)$, $\operatorname{Re}(\mu\pm\nu) > -1$	$\dfrac{\sin(\pi\mu)\,\Gamma(\mu-\nu+1)}{\sin[\pi(\mu+\nu)]}\,\dfrac{p}{(\sqrt{p^2-a^2})^{\mu+1}} Q_\mu^\nu\left(\frac{p}{\sqrt{p^2-a^2}}\right)$ $(\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a)$
9.346	$\frac{1}{2t}\exp\left(-\frac{\lambda}{2at}\right) K_\nu(a\lambda t)$, $\operatorname{Re}\left(\frac{\lambda}{a}\right) > 0$	$pK_\nu\left(\sqrt{\frac{\lambda}{a}(p+\sqrt{p^2-a^2})}\right) K_\nu\left(\sqrt{\dfrac{a\lambda}{p+\sqrt{p^2-a^2}}}\right)$ $(\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a\lambda)$
9.347	$t^{\frac{\nu}{2}} K_\nu(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\frac{a^{\frac{\nu}{2}}}{2}\,\Gamma(\nu+1)\,p^{-\nu} e^{\frac{a}{p}}\,\Gamma\left(-\nu, \frac{a}{p}\right)$
9.348	$t^{\mu-\frac{1}{2}} K_{2\nu}(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re}(\mu\pm\nu) < -\frac{1}{2}$	$\dfrac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{a}\,p^{\mu-1}} e^{\frac{a}{2p}} W_{-\mu,\nu}\left(\frac{a}{p}\right)$
9.349	$t^{2\nu} K_{2\nu}(\sqrt{t})\, I_{2\nu}(\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{4}$	$\dfrac{\Gamma\left(2\nu+\frac{1}{2}\right)}{2p^{3\nu-\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{2p}} W_{-\nu,\nu}\left(\frac{1}{p}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$
9.350	$t^{2\nu} \exp\left(-\frac{t^2}{8a}\right) I_\nu\left(\frac{t^2}{8a}\right)$, $\operatorname{Re} a \geqslant 0$, $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{4}$	$\frac{a^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(1+4\nu)}{2^{4\nu}\Gamma(1+\nu)\cdot p^\nu} e^{\frac{ap^2}{2}} W_{-\frac{3\nu}{2}, \frac{\nu}{2}}(ap^2)$
9.351	$\frac{1}{t} \exp\left(-\frac{a+b}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{a-b}{2t}\right)$, $\operatorname{Re} a \geqslant \operatorname{Re} b > 0$	$2pK_\nu(\sqrt{ap}+\sqrt{bp})\, I_\nu(\sqrt{ap}-\sqrt{bp})$
9.352	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < b, \\ (t-b)^{\frac{\nu}{2}}(t+b)^{-\frac{\nu}{2}} I_\nu(a\sqrt{t^2-b^2}) & \text{pour } t > b, \end{cases}$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$a^\nu p e^{-b\sqrt{p^2-a^2}} \frac{1}{\sqrt{p^2-a^2}\,(p+\sqrt{p^2-a^2})^\nu}$, $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Re} a \rvert$
9.353	$(t^2+bt)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(a\sqrt{t^2+bt})$, $\operatorname{Re} \nu > -1$, $\lvert \arg b \rvert < \pi$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{2}\right)^\nu \left(\frac{b}{\sqrt{p^2-a^2}}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} p e^{\frac{bp}{2}} K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2}\sqrt{p^2-a^2}\right)$, $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Re} a \rvert$
9.354	$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{a}{t}} K_\nu\left(\frac{a}{t}\right)$, $\operatorname{Re} a > 0$	$2\sqrt{\pi p}\, K_{2\nu}(2\sqrt{2ap})$
9.355	$\frac{1}{t} \exp\left(-\frac{a+b}{2t}\right) K_\nu\left(\frac{a-b}{2t}\right)$, $\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} b > 0$	$2pK_\nu(\sqrt{ap}+\sqrt{bp})\, K_\nu(\sqrt{ap}-\sqrt{bp})$
9.356	$-\frac{2}{\pi} K_0\left[2a \operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)\right]$, $\operatorname{Re} a > 0$	$pJ_p(a) \frac{\partial Y_p(a)}{\partial p} - pY_p(a) \frac{\partial J_p(a)}{\partial p}$
9.357	$\frac{2}{\pi^2} \sin(2\pi\nu)\, K_{2\nu}\left[2a \operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)\right]$, $\operatorname{Re} a > 0$	$pJ_{\nu-p}(a)\, Y_{-\nu-p}(a) - pJ_{-\nu-p}(a)\, Y_{\nu-p}(a)$
9.358	$\operatorname{csch}\left(\frac{t}{2}\right) K_{2\nu}\left[a \operatorname{csch}\left(\frac{t}{2}\right)\right]$, $\operatorname{Re} a > 0$	$\frac{p}{a} \Gamma\left(p+\nu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(p-\nu+\frac{1}{2}\right) W_{-p,\nu}(ia)\, W_{-p,\nu}(-ia)$, $\operatorname{Re}(p \pm \nu) > -1$

9.359	$\frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)} \exp\left(-\frac{ae^t+b}{e^t-1}\right) K_{2\nu}\left(\frac{\sqrt{ab}}{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)}\right)$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$	$\frac{p}{\sqrt{ab}} \Gamma\left(p+\nu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(p-\nu+\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{a+b}{2}} W_{-p,\nu}(a) W_{-p,\nu}(b)$, $\operatorname{Re}(p\pm\nu) > -\frac{1}{2}$
9.360	$\operatorname{ber} t$	$p\left[\frac{1}{2}(p^4+1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{p^2}{2(p^4+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$, $\operatorname{Re} p > \frac{1}{\sqrt{2}}$
9.361	$\operatorname{bei} t$	$p\left[\frac{1}{2}(p^4+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{p^2}{2(p^4+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$, $\operatorname{Re} p > \frac{1}{\sqrt{2}}$
9.362	$\operatorname{ber}(2\sqrt{t})$	$\cos\frac{1}{p}$
9.363	$\operatorname{bei}(2\sqrt{t})$	$\sin\frac{1}{p}$
9.364	$\mathbf{H}_0(at)$	$\frac{2p}{\pi\sqrt{p^2+a^2}} \ln\left(\frac{a+\sqrt{p^2+a^2}}{p}\right)$, $\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im} a\rvert$
9.365	$\mathbf{H}_{-n-\frac{1}{2}}(at)$	$(-1)^n a^{n+\frac{1}{2}} p \frac{(p+\sqrt{p^2+a^2})^{-n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{p^2+a^2}}$, $\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im} a\rvert$
9.366	$t^{\nu} \mathbf{L}_{\nu}(at)$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\frac{(2a)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) p}{\sqrt{\pi}(p^2-a^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} - \frac{\Gamma(2\nu+1) a^{\nu}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\, p^{\nu-\frac{1}{2}}(a^2-p^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}} P^{-\nu-\frac{1}{2}}_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{p}\right)$, $\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Re} a\rvert$
9.367	$t^{\frac{\nu}{2}} \mathbf{L}_{\nu}(\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}$	$2^{-\nu} p^{-\nu} e^{\frac{1}{4p}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$
9.368	$t^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{L}_{-\nu}(\sqrt{t})$	$\dfrac{(2p)^{-\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} e^{\frac{1}{4p}} \gamma\left(\frac{1}{2}-\nu, \frac{1}{4p}\right)$
9.369	$t^{\frac{1}{2}} s_{\mu, \frac{1}{4}}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\mathrm{Re}\, \mu > -\frac{3}{4}$	$2^{-2\mu-1} p^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(2\mu+\frac{3}{2}\right) S_{-\mu-1, \frac{1}{4}}\left(\frac{p^2}{2}\right)$

§ 6. Fonction gamma et fonctions associées. Fonctions intégrales. Fonctions hypergéométriques dégénérées

n°	$f(t)$	$F(p)$
9.370	$\Gamma(\nu, at)$, $\mathrm{Re}\, \nu > -1$	$\Gamma(\nu)\left[1-\left(1+\frac{p}{a}\right)^{-\nu}\right]$, $\mathrm{Re}\, p > -\mathrm{Re}\, a$
9.371	$e^{at}\Gamma(\nu, at)$, $\mathrm{Re}\, \nu > -1$	$\Gamma(\nu) \dfrac{p}{p-a}\left(1-\dfrac{a^\nu}{p^\nu}\right)$
9.372	$t^{\mu-1} e^{\frac{a}{t}} \Gamma\left(\nu, \frac{a}{t}\right)$, $\mathrm{Re}(\nu-\mu) < 1$, $\lvert \arg a \rvert < \pi$	$2^{2+\mu-2\nu} \Gamma(1+\mu-\nu) a^{\frac{\mu}{2}} p^{1-\frac{\mu}{2}} S_{2\nu-\mu-1, \mu}(2\sqrt{ap})$
9.373	$e^{bt}\gamma(\nu, at)$, $\mathrm{Re}\, \nu > -1$	$a^\nu \Gamma(\nu) \dfrac{p}{p-b} (p+a-b)^{-\nu}$
9.374	$\mathrm{erfc}\left(\frac{t}{2a}\right)$, $\lvert \arg a \rvert < \frac{\pi}{4}$	$1-e^{a^2p^2}\, \mathrm{erfc}\,(ap)$
9.375	$\mathrm{erfc}(\sqrt{at})$	$\dfrac{\sqrt{p+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{p+a}}$, $\mathrm{Re}\, p > -\mathrm{Re}\, a$

9.376	$\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}\right)$, Re $a>0$	$e^{-\sqrt{ap}}$
9.377	$\operatorname{Si}(t)$	$\operatorname{arc\,cotg} p$
9.378	$\operatorname{si}(t)$	$-\operatorname{arctg} p$
9.379	$\operatorname{Ci}(t)=-\operatorname{ci}(t)$	$\frac{1}{2}\ln(p^2+1)$
9.380	$\cos(t)\operatorname{Si}(t)-\sin t\operatorname{Ci}(t)$	$\frac{p}{p^2+1}\ln p$
9.381	$\sin t\operatorname{Si}(t)+\cos t\operatorname{Ci}(t)$	$-\frac{p^2\ln p}{p^2+1}$
9.382	$\operatorname{li}(e^t)$	$-\ln(p-1)$
9.383	$\operatorname{li}(e^{-t})$	$-\ln(p+1)$
9.384	$\ln\alpha-\operatorname{Ei}(\alpha t)$, Re $\alpha>0$	$\ln(p-\alpha)$
9.385	$\ln\alpha-\operatorname{Ei}(-\alpha t)$, Re $\alpha>0$	$\ln(p+\alpha)$
9.386	$\operatorname{shi}(at)$	$\frac{1}{2}\ln\frac{p+a}{p-a}$
9.387	$Ji_0(\alpha t)+\ln\alpha$	$\ln(p+\sqrt{p^2+\alpha^2})$
9.388	$Ii_0(\alpha t)+\ln\alpha+i\frac{\pi}{2}$	$\ln(p+\sqrt{p^2-\alpha^2})$
9.389	$Ji_\nu(t)$, Re $\nu>0$	$\frac{1}{\nu}(\sqrt{p^2+1}-p)^\nu-\frac{1}{\nu}$
9.390	$Ji_0(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{2}\operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{p}\right)$
9.391	$t^\nu e^{\frac{t^2}{4}} D_{-\mu}(t)$, Re $\nu>-1$	$\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\mu)}p\cdot\int_0^\infty x^{\mu-1}(p+x)^{-\nu-1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$
9.392	$\exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right)\left[D_{-2\nu}\left(-\frac{t}{a}\right)-D_{-2\nu}\left(\frac{t}{a}\right)\right]$	$\sqrt{2\pi}\,a^{1-2\nu}p^{1-2\nu}e^{\frac{a^2p^2}{2}}\frac{\Gamma\left(\nu,\frac{a^2p^2}{2}\right)}{\Gamma(\nu)}$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.393	$t^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{\frac{t}{4}} D_\nu(\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}\nu < 1$	$\sqrt{\pi p}\,(1+\sqrt{2p})^\nu$
9.394	$D_{2n+1}(\sqrt{2t})$	$(-2)^n \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(p-\frac{1}{2}\right)^n p\left(p+\frac{1}{2}\right)^{-n-\frac{3}{2}}$, $\operatorname{Re} p > -\frac{1}{2}$
9.395	$D_{2\nu}(-2\sqrt{at}) - D_{2\nu}(2\sqrt{at})$	$\dfrac{2^{\nu+\frac{3}{2}}\pi\sqrt{ap}\,(p-a)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)\,(p+a)^{\nu+1}}$, $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Re} a \rvert$
9.396	$t^{\nu-1} e^{\frac{t}{4}} D_{2\mu-1}(\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}\nu > 0$, $\operatorname{Re}(\nu-\mu) > -1$	$\sqrt{2\pi}\,\Gamma(2\nu)\,p\,(2p)^{-\frac{\mu+\nu}{2}}(2p-1)^{\frac{\mu-\nu}{2}} P^{\mu-\nu}_{\mu+\nu-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)$
9.397	$t^{-\nu} e^{-\frac{a}{8t}} D_{2\nu-1}\left(\sqrt{\frac{a}{2t}}\right)$, $\operatorname{Re} a > 0$	$2^{\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,p^\nu e^{-\sqrt{ap}}$
9.398	$\dfrac{e^{\frac{t}{2}}}{(e^t-1)^{\mu+\frac{1}{2}}}\exp\left(-\dfrac{a}{1-e^{-t}}\right) D_{2\mu}\left(\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{1-e^{-t}}}\right)$, $\operatorname{Re} a > 0$	$e^{-a}\, 2^{p+\mu}\, p\Gamma(p+\mu)\, D_{-2p}(2\sqrt{a})$, $\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re}\mu$
9.399	$t^{\mu-\frac{1}{2}} M_{k,\mu}(at)$, $\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}$	$a^{\mu+\frac{1}{2}}\Gamma(2\mu+1)\dfrac{p\left(p-\frac{a}{2}\right)^{k-\mu-\frac{1}{2}}}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^{k+\mu+\frac{1}{2}}}$, $\operatorname{Re} p > \frac{1}{2}\lvert \operatorname{Re} a \rvert$

9.400	$t^{\nu-1} M_{k,\mu}(at)$, $\mathrm{Re}(\mu+\nu) > -\frac{1}{2}$	$a^{\mu+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{a}{2}\right)^{-\mu-\nu-\frac{1}{2}} p \times$ $\times {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2},\ \mu-k+\frac{1}{2};\ 2\mu+1;\ \frac{a}{p+\frac{a}{2}}\right)$, $\mathrm{Re}\, p > \frac{1}{2}\lvert\mathrm{Re}\, a\rvert$
9.401	$\frac{1}{t^k} \exp\left(-\frac{a}{2t}\right) W_{k,\mu}\left(\frac{a}{t}\right)$, $\mathrm{Re}\, a > 0$	$2\sqrt{a}\, p^{\frac{k-1}{2}} K_{2\mu}(2\sqrt{ap})$

§ 7. Fonctions diverses

9.402	$\nu(t)$	$\frac{1}{\ln p}$
9.403	$\frac{\nu(t)}{(1-e^{-t})}$	$p \int_0^\infty \zeta(u+1,\ p)\, du$
9.404	$\frac{\nu(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$	$2\sqrt{\pi p}\, \nu\left(\frac{1}{p}\right)$
9.405	$\nu(1-e^{-t})$	$p\Gamma(p)\, \nu(1,\ p)$
9.406	$\nu(e^{-t})$	$\int_0^\infty \frac{p\, du}{(p+u)\, \Gamma(u+1)}$
9.407	$\vartheta_0(v,\ t)$, $-\frac{1}{2} \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{p}\, \mathrm{ch}\, 2v\sqrt{p}}{\mathrm{sh}\sqrt{p}}$
9.408	$\vartheta_1(v,\ t)$, $-\frac{1}{2} \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{p}\, \mathrm{sh}\, 2v\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\sqrt{p}}$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p)=p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
9.409	$\vartheta_2(v,\ t),\ 0 \leqslant v \leqslant 1$	$-\dfrac{\sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,(2v-1)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\sqrt{p}}$
9.410	$\vartheta_3(v,\ t),\ 0 \leqslant v \leqslant 1$	$\dfrac{\sqrt{p}\,\mathrm{ch}\,(2v-1)\sqrt{p}}{\mathrm{sh}\sqrt{p}}$
9.411	$\hat{\vartheta}_0(v,\ t),\ -\frac{1}{2} \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{p}\cdot\mathrm{sh}\,2v\sqrt{p}}{\mathrm{sh}\sqrt{p}}$
9.412	$\hat{\vartheta}_2(v,\ t),\ 0 \leqslant v \leqslant 1$	$\dfrac{\sqrt{p}\,\mathrm{ch}\,(2v-1)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\sqrt{p}}$
9.413	$\hat{\vartheta}_3(v,\ t),\ 0 \leqslant v \leqslant 1$	$-\dfrac{\sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,(2v-1)\sqrt{p}}{\mathrm{sh}\sqrt{p}}$
9.414	$\dfrac{1}{2a}\left[\vartheta_3\left(\dfrac{v-u}{2},\ \dfrac{t}{a^2}\right)-\vartheta_3\left(\dfrac{v+u}{2},\ \dfrac{t}{a^2}\right)\right],$ $0 \leqslant v \leqslant u \leqslant a$	$\sqrt{p}\,\dfrac{\mathrm{sh}\,(a-u)\sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,v\sqrt{p}}{\mathrm{sh}\,a\sqrt{p}}$
9.415	$\dfrac{\partial}{\partial x}\vartheta_1\left(\dfrac{x}{2},\ t\right),\ -1<x<1$	$\dfrac{p\,\mathrm{ch}\,x\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\sqrt{p}}$
9.416	$\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial}{\partial x}\vartheta_2\left(\dfrac{x}{2a},\ \dfrac{t}{a^2}\right),\ 0<x<2a$	$-\dfrac{p\,\mathrm{ch}\,(a-x)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\,a\sqrt{p}}$

9.417	$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\vartheta_3\left(\frac{x}{2a},\frac{t}{a^2}\right),\quad 0<x<2a$	$-\frac{p\,\mathrm{sh}\,(a-x)\sqrt{p}}{\mathrm{sh}\,a\sqrt{p}}$
9.418	$t^{\gamma-1}F(2a,\ 2b;\ \gamma;\ -\lambda t),\ \mathrm{Re}\,\gamma>0,\ \lvert\arg\lambda\rvert<\pi$	$\Gamma(\gamma)\,p^{-\gamma+1}\left(\frac{p}{\lambda}\right)^{a+b-\frac{1}{2}}e^{\frac{p}{2\gamma}}W_{\frac{1}{2}-a-b,\ a-b}\left(\frac{p}{2\lambda}\right)$
9.419	$(1-e^{-t})^{\mu}F(-n,\ \mu+b+n;\ b;\ e^{-t}),\ \mathrm{Re}\,\mu>-1$	$\frac{p\mathrm{B}(p,\ \mu+n+1)\,\mathrm{B}(p,\ b+n-p)}{\mathrm{B}(p,\ b-p)}$
9.420	$\frac{P_{\nu}^{\mu}(1+2t)}{[t(1+t)]^{\frac{\mu}{2}}},\ \mathrm{Re}\,\mu<1$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}p^{\mu+\frac{1}{2}}e^{\frac{p}{2}}K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{2}\right)$
9.421	$\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{\mu}{2}}P_{\nu}^{\mu}(1+2t),\ \mathrm{Re}\,\mu<1$	$e^{\frac{p}{2}}W_{\mu,\ \nu+\frac{1}{2}}(p)$
9.422	$\frac{P_{\nu}^{\mu}(\sqrt{1+t})}{t^{\frac{\mu}{2}}\sqrt{1+t}},\ \mathrm{Re}\,\mu<1$	$2^{\mu}p^{\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}}e^{\frac{p}{2}}W_{\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4},\ \frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}}(p)$
9.423	$\sqrt{t}\,P_{\nu}^{\frac{1}{4}}(\sqrt{1+t^2})\,P_{\nu}^{-\frac{1}{4}}(\sqrt{1+t^2})$	$\frac{p}{2}\sqrt{\frac{\pi p}{2}}\,H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}\left(\frac{p}{2}\right)H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}\left(\frac{p}{2}\right)$
9.424	$P_{2n}(\cos t)$	$\frac{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\ldots[p^2+(2n-1)^2]}{(p^2+2^2)(p^2+4^2)\ldots[p^2+(2n)^2]}$
9.425	$P_{2n+1}(\cos t)$	$\frac{p^2(p^2+2^2)(p^2+4^2)\ldots[p^2+(2n)^2]}{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\ldots[p^2+(2n+1)^2]}$

Suite

n°	$f(t)$	$F(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$
9.426	$P_{2n}(\operatorname{ch} t)$	$\dfrac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)\ldots[p^2-(2n-1)^2]}{(p^2-2^2)(p^2-4^2)\ldots[p^2-(2n)^2]}$
9.427	$P_{2n+1}(\operatorname{ch} t)$	$\dfrac{p^2(p^2-2^2)(p^2-4^2)\ldots[p^2-(2n)^2]}{(p^2-1^2)(p^2-3^2)\ldots[p^2-(2n+1)^2]}$
9.428	$\mathrm{He}_{2n+1}(\sqrt{t})$	$\sqrt{\pi}\, 2^{-n-1} \dfrac{(2n+1)!}{n!} \dfrac{\left(\frac{1}{2}-p\right)^n}{p^{n+\frac{1}{2}}}$
9.429	$t^{\alpha-1}\, \mathrm{He}_n(t)$, $\mathrm{Re}\,\alpha > \begin{cases} 0, \text{ si } n \text{ est pair,} \\ -1, \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$	$\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \dfrac{n!\, \Gamma(a+n-2m)}{m!\,(n-2m)!} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^m p^{2m-a-n+1}$, $\left[\dfrac{n}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{n-1}{2}, \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$
9.430	$L_n^\alpha(t)$	$\sum_{m=0}^{n} \binom{a+m-1}{m} \dfrac{(p-1)^{n-m}}{p^{n-m}}$
9.431	$t^\beta L_n^\alpha(t)$, $\mathrm{Re}\,\beta > -1$	$\dfrac{\Gamma(\beta+n+1)}{n!} \dfrac{(p-1)^n}{p^{\beta+n}}\, {}_2F_1\left(-n,\, \alpha-\beta;\; -\beta-n;\, \dfrac{p}{p-1}\right)$

9.432	$t^{\alpha} e^{\lambda t} L_n^{\alpha}(kt)$, $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(a+n+1)}{n!} \frac{p(p-k-\lambda)^n}{(p-\lambda)^{a+n+1}}$, $\mathrm{Re}(p-\lambda) > 0$
9.433	$t^{-2\lambda-1} S_1\left(\nu-\frac{1}{2}, -\nu-\frac{1}{2}, \lambda, \lambda+\frac{1}{2}; at\right)$, $\mathrm{Re}(\nu-\lambda) > 0$	$\frac{2^{-2\lambda-1}}{\sqrt{\pi}} p^{2\lambda+1} J_{2\nu}\left(\frac{4a}{p}\right)$
9.434	$t^{-2\lambda-1} S_2\left(\nu-\frac{1}{2}, -\nu-\frac{1}{2}, \lambda+\frac{1}{2}, \lambda; at\right)$, $\mathrm{Re}(\lambda\pm\nu) < 0$	$\frac{2^{-2\lambda}}{\sqrt{\pi}} p^{2\lambda+1} K_{2\nu}\left(\frac{4a}{p}\right)$

CHAPITRE X

TRANSFORMATION DE MELLIN

§ 1. Formules fondamentales

nº.	$f(t)$	$F(s)=\int_0^\infty t^{s-1} f(t)\,dt$
10.1	$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, t^{-s}\, ds$	$F(s)$
10.2	$f(at),\ a>0$	$\frac{F(s)}{a^s}$
10.3	$t^a f(t)$	$F(s+a)$
10.4	$f\left(\frac{1}{t}\right)$	$F(-s)$
10.5	$t^b f(at^h),\ a>0,\ h>0$	$\frac{1}{h} a^{-\frac{s+b}{h}} F\left(\frac{s+b}{h}\right)$
10.6	$t^b f(at^{-h}),\ a>0,\ h>0$	$\frac{1}{h} a^{\frac{s+b}{h}} F\left(-\frac{s+b}{h}\right)$
10.7	$f^{(n)}(t)$	$(-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} F(s-n)$

10.8	$\left(t\frac{d}{dt}\right)^n f(t)$	$(-1)^n s^n F(s)$
10.9	$t^{\alpha}\int\limits_0^{\infty} \tau^{\beta} f_1(t\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau$	$F_1(s+\alpha)\, F_2(1-s-\alpha+\beta)$
10.10	$t^{\alpha}\int\limits_0^{\infty} \tau^{\beta} f_1\left(\frac{t}{\tau}\right) f_2(\tau)\, d\tau$	$F_1(s+\alpha)\, F_2(s+\alpha+\beta+1)$

§ 2. Fonctions diverses

10.11	$(1+at)^{-n-1}$, $\vert \arg a \vert < \pi$	$(-1)^n \frac{\pi}{a^s} \operatorname{cosec}(\pi s) \binom{s-1}{n}$, $0 < \mathrm{Re}\, s < n+1$
10.12	$\begin{cases} t^{\nu} \text{ pour } 0 < t < 1, \\ 0 \text{ pour } t > 1 \end{cases}$	$\frac{1}{s+\nu}$, $\mathrm{Re}\, s > -\mathrm{Re}\, \nu$
10.13	$(1+2t\cos\varphi+t^2)^{-\nu}$, $-\pi < \varphi < \pi$	$2^{\nu-\frac{1}{2}} (\sin\varphi)^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right) \mathrm{B}(s,\ 2\nu-s)\ P^{\frac{1}{2}-\nu}_{s-\nu-\frac{1}{2}}(\cos)\varphi$, $0 < \mathrm{Re}\, s < \mathrm{Re} 2\nu$
10.14	$(1+t)^{\nu}(1+at)^{\mu}$, $\vert \arg a \vert < \pi$	$\mathrm{B}(s,\ -\mu-\nu-s)\, {}_2F_1(-\mu,\ s;\ -\mu-\nu;\ 1-a)$, $0 < \mathrm{Re}\, s < -\mathrm{Re}(\mu+\nu)$
10.15	e^{-at}, $\mathrm{Re}\, a > 0$	$a^{-s}\Gamma(s)$
10.16	$\begin{cases} e^{-\beta t} \text{ pour } 0 < t < a, \\ 0 \quad \text{pour } t > a \end{cases}$	$\beta^{-s}\gamma(s,\ \beta a)$
10.17	$\frac{e^{-at}}{(t+b)}$, $\mathrm{Re}\, a > 0$, $\vert \arg b \vert < \pi$	$\Gamma(s)\, b^{s-1} e^{ab}\, \Gamma(1-s,\ ab)$
10.18	$\frac{1}{e^{at}+1}$, $\mathrm{Re}\, a > 0$	$a^{-s}\Gamma(s)(1-2^{1-s})\,\zeta(s)$, $\mathrm{Re}\, s > 0$

Suite

n°	$f(t)$	$F(s)=\int_0^\infty t^{s-1}f(t)\,dt$
10.19	$\frac{1}{e^{at}-1}$, $\operatorname{Re} a>0$	$a^{-s}\Gamma(s)\zeta(s)$, $\operatorname{Re} s>1$
10.20	e^{-at^2-bt}, $\operatorname{Re} a>0$	$(2a)^{-\frac{s}{2}}\Gamma(s)\exp\left(\frac{b^2}{8a}\right)D_{-s}\left(\frac{b}{\sqrt{2a}}\right)$
10.21	$\frac{\exp(-a\sqrt{1+t})}{\sqrt{1+t}}$, $\operatorname{Re} a>0$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}-s}\Gamma(s)K_{\frac{1}{2}-s}(a)$
10.22	$\begin{cases} t^{\nu}\ln t \text{ pour } 0<t<1, \\ 0 \quad \text{pour } t>1 \end{cases}$	$-\frac{1}{(s+\nu)^2}$, $\operatorname{Re} s>-\operatorname{Re}\nu$
10.23	$t^{\nu}e^{-at}\ln t$, $\operatorname{Re} a>0$	$a^{-s-\nu}\Gamma(s+\nu)[\psi(s+\nu)-\ln a]$, $\operatorname{Re} s>-\operatorname{Re}\nu$
10.24	$\begin{cases}(1-t)^{\nu-1}(\ln t)^2 \text{ pour } 0<t<1, \\ 0 \quad \text{pour } t>1, \operatorname{Re}\nu>0\end{cases}$	$B(s,\nu)\{[\psi(s)-\psi(s+\nu)]^2+\psi'(s)-\psi'(s+\nu)\}$
10.25	$\frac{(\ln t)^n}{(a^2+2at\cos\varphi+t^2)}$, $a>0$, $-\pi<\varphi<\pi$	$-\pi\cos\varphi\frac{d^n}{ds^n}[a^{s-2}\operatorname{cosec}(\pi s)\sin(s-1)\varphi]$, $0<\operatorname{Re} s<2$
10.26	$e^{-t}(\ln t)^n$	$\frac{d^n}{ds^n}\Gamma(s)$, $\operatorname{Re} s>0$
10.27	$(a+t)^{-\nu}\ln(a+t)$, $\lvert\arg a\rvert<\pi$	$a^{s-\nu}B(s,\nu-s)[\psi(\nu)-\psi(\nu-s)+\ln a]$, $0<\operatorname{Re} s<\operatorname{Re}\nu$
10.28	$\sin(at)$, $a>0$	$a^{-s}\Gamma(s)\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)$, $-1<\operatorname{Re} s<1$
10.29	$e^{-bt}\sin(at)$, $\operatorname{Re} b>\lvert\operatorname{Im} a\rvert$	$(a^2+b^2)^{-\frac{s}{2}}\Gamma(s)\sin\left[s\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)\right]$, $\operatorname{Re} s>-1$

10.30	$e^{-\frac{at^2}{2}-bt}\sin(\gamma t)$, $\operatorname{Re} a > 0$	$-\frac{i}{2}\Gamma(s)\, a^{-\frac{s}{2}} e^{\frac{b^2-\gamma^2}{4a}} \left\{ e^{-\frac{ib}{2a}\gamma} D_{-s} \times \right.$ $\left. \times \left(\frac{b-i\gamma}{\sqrt{a}}\right) - e^{\frac{ib\gamma}{2a}} D_{-s}\left(\frac{b+i\gamma}{\sqrt{a}}\right)\right\}$, $\operatorname{Re} s > -1$
10.31	$\ln t \sin(at)$, $a > 0$	$a^{-s}\Gamma(s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\left[\psi(s) - \ln a + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\right]$, $-1 < \operatorname{Re} s < 1$
10.32	$\sin^2(at)$, $a > 0$	$-2^{-s-1} a^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)$, $-2 < \operatorname{Re} s < 0$
10.33	$\sin\left[a\left(t - \frac{b^2}{t}\right)\right]$, $a > 0$, $b > 0$	$2b^s K_s(2ab)\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)$, $\lvert \operatorname{Re} s \rvert < 1$
10.34	$\sin\left[a\left(t + \frac{b^2}{t}\right)\right]$, $a > 0$, $b > 0$	$\pi b^s\left[J_s(2ab)\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) - Y_s(2ab)\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right]$, $\lvert \operatorname{Re} s \rvert < 1$
10.35	$\begin{cases}(1-t)^{\nu-1}\cos(at) & \text{pour } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1,\end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu > 0$	$\frac{1}{2}\mathrm{B}(s, \nu)\left[{}_1F_1(s;\ s+\nu;\ ia) - {}_1F_1(s;\ s+\nu;\ -ia)\right]$, $\operatorname{Re} s > 0$
10.36	$e^{-at}\cos(bt)$, $\operatorname{Re} a > \lvert \operatorname{Im} b \rvert$	$(a^2+b^2)^{-\frac{s}{2}}\Gamma(s)\cos\left[s \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\right]$, $\operatorname{Re} s > 0$
10.37	$e^{-\frac{at^2}{2}-bt}\cos(\gamma t)$, $\operatorname{Re} a > 0$	$\frac{a^{-\frac{s}{2}}}{2}\Gamma(s)\, e^{\frac{b^2-\gamma^2}{4a}}\left\{ e^{-\frac{ib\gamma}{2a}} D_{-s} \times \right.$ $\left. \times \left(\frac{b-i\gamma}{\sqrt{a}}\right) + e^{\frac{ib\gamma}{2a}} D_{-s}\left(\frac{b+i\gamma}{\sqrt{a}}\right)\right\}$, $\operatorname{Re} s > 0$
10.38	$\ln t \cos(at)$, $a > 0$	$a^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\left[\psi(s) - \ln a - \frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right]$, $0 < \operatorname{Re} s < 1$

Suite

n°	$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t)\,dt$
10.39	$\cos\left[a\left(t+\frac{b^2}{t}\right)\right], \ a>0, \ b>0$	$-\pi b^s\left[J_s(2ab)\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)+Y_s(2ab)\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right],$ $-1<\operatorname{Re} s<1$
10.40	$\cos\left[a\left(t-\frac{b^2}{t}\right)\right], \ a>0, \ b>0$	$2b^sK_s(2ab)\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right), \ -1<\operatorname{Re} s<1$
10.41	$\sin(at)\sin(bt), \ a>0, \ b>0, \ a\neq b$	$\frac{\Gamma(s)}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)[\lvert b-a\rvert^{-s}-(b+a)^{-s}], \ -2<\operatorname{Re} s<1$
10.42	$\sin(at)\cos(bt), \ a>0, \ b>0$	$\frac{\Gamma(s)}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)[a+b]^{-s}+$ $+\operatorname{sign}(a-b)\lvert a-b\rvert^{-s}], \ -1<\operatorname{Re} s<1$
10.43	$\operatorname{sch}(at), \ \operatorname{Re} a>0$	$a^{-s}2^{1-s}\Gamma(s)\Phi\left(-1, \ s, \ \frac{1}{2}\right), \ \operatorname{Re} s>0$
10.44	$\operatorname{csch}(at), \ \operatorname{Re} a>0$	$a^{-s}2(1-2^{-s})\Gamma(s)\zeta(s), \ \operatorname{Re} s>1$
10.45	$e^{-t}\operatorname{sch} t$	$(1-2^{1-s})\Gamma(s)2^{1-s}\zeta(s), \ \operatorname{Re} s>0$
10.46	$e^{-t}\operatorname{csch} t$	$2^{1-s}\Gamma(s)\zeta(s), \ \operatorname{Re} s>1$
10.47	$\operatorname{sh}(at)\operatorname{csch}(bt), \ \operatorname{Re} b>\lvert\operatorname{Re} a\rvert$	$(2b)^{-s}\Gamma(s)\left\{\zeta\left(s, \ \frac{1}{2}-\frac{a}{2b}\right)-\zeta\left(s, \ \frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)\right\}, \ \operatorname{Re} s>--1$
10.48	$\psi(t+1)+\ln\gamma$	$\pi\operatorname{cosec}(\pi s)\zeta(2-s), \ 0<\operatorname{Re} s<1$
10.49	$\psi(1+t)-\ln(1+t)$	$-\pi\operatorname{cosec}(\pi s)\left\{\zeta(1-s)+\frac{1}{s}\right\}, \ 0<\operatorname{Re} s<1$
10.50	$\psi'(t+1)$	$\pi(1-s)\operatorname{cosec}(\pi s)\zeta(2-s), \ 0<\operatorname{Re} s>2$
10.51	$\operatorname{erfc} t$	$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,s}, \ \operatorname{Re} s>0$

10.52	$\mathrm{Ei}(-t)$	$-\frac{\Gamma(s)}{s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$
10.53	$\mathrm{Si}(t)$	$-\frac{1}{s} \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \Gamma(s), \quad -1 < \mathrm{Re}\, s < 0$
10.54	$\mathrm{si}(t)$	$-\frac{4}{s} \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \Gamma(s), \quad -1 < \mathrm{Re}\, s < 0$
10.55	$\mathrm{Ci}(t)$	$-\frac{1}{s} \cos\left(\frac{\pi}{2} s\right) \Gamma(s), \quad 0 < \mathrm{Re}\, s < 1$
10.56	$J_\nu(at), \; a > 0$	$\frac{2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\nu}{2}\right)}{a^s \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \frac{s}{2} + 1\right)}, \quad -\mathrm{Re}\, \nu < \mathrm{Re}\, s < \frac{3}{2}$
10.57	$Y_\nu(at), \; a > 0$	$\frac{-2^{s-1} a^{-s}}{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \times$ $\times \cos\left[\frac{\pi}{2}(s - \nu)\right], \quad \lvert \mathrm{Re}\, \nu \rvert < \mathrm{Re}\, s < \frac{3}{2}$
10.58	$H_\nu^{(1)}(at), \; a > 0$	$\frac{(1 - i)\, 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\nu}{2}\right)}{a^s \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \frac{s}{2} + 1\right)}, \quad \lvert \mathrm{Re}\, \nu \rvert < \mathrm{Re}\, s < \frac{3}{2}$
10.59	$H_\nu^{(2)}(at), \; a > 0$	$\frac{(1 + i)\, 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\nu}{2}\right)}{a^s \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \frac{s}{2} + 1\right)}, \quad \lvert \mathrm{Re}\, \nu \rvert < \mathrm{Re}\, s < \frac{3}{2}$
10.60	$K_\nu(at), \; \mathrm{Re}\, a > 0$	$a^{-s} 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\nu}{2}\right), \quad \mathrm{Re}\, s > \lvert \mathrm{Re}\, \nu \rvert$

Suite

n°	$f(t)$	$F(s)=\int_0^\infty t^{s-1}f(t)\,dt$
10.61	$K_{ia}(t)$	$\dfrac{2^{s-2}\left[\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right]^2}{\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{a^2}{(s+2n)^2}\right]}$
10.62	$e^{-at}K_\nu(bt)$, $\mathrm{Re}\,(a+b)>0$	$\dfrac{\sqrt{\pi}\,b^\nu\,\Gamma(s+\nu)\,\Gamma(s-\nu)}{2^s a^{s+\nu}\,\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}\times$ $\times\,{}_2F_1\left(\frac{s+\nu+1}{2},\ \frac{s+\nu}{2};\ s+\frac{1}{2};\ 1-\frac{b^2}{a^2}\right)$, $\mathrm{Re}\,s>\lvert\mathrm{Re}\,\nu\rvert$
10.63	$J_\nu(bt)\,Y_\mu(at)$, $a>b>0$	$\dfrac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\nu-\mu+s-1)\right]}{2^{1-s}\pi\Gamma(\nu+1)\,a^{\nu+s}}\,\Gamma\left[\frac{1}{2}(s+\mu+\nu)\right]\times$ $\times\,\Gamma\left(\frac{s-\mu+\nu}{2}\right){}_2F_1\left(\frac{s+\mu+\nu}{2},\ \frac{s-\mu+\nu}{2};\ 1+\nu;\ \frac{b^2}{a^2}\right)$, $\mathrm{Re}\,(-\nu\pm\mu)<\mathrm{Re}\,s<2$
10.64	$Y_\mu(at)\,Y_\nu(bt)$, $a>b>0$	$\int_0^\infty t^{s-1}\left\{J_\mu(at)\,J_\nu(bt)+\frac{4}{\pi^2}\sin\times\right.$ $\left.\times\left[\frac{\pi}{2}(1-s+\mu+\nu)\right]K_\mu(at)\,K_\nu(bt)\right\}dt$, $\lvert\mathrm{Re}\,(\mu\pm\nu)\rvert<\mathrm{Re}\,s<2$

10.65	$J_\nu(at)\,K_\nu(at),\ \lvert\arg a\rvert < \frac{\pi}{4}$	$\dfrac{2^{s-3}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{4}+\frac{\nu}{2}\right)}{a^s\,\Gamma\left(1-\frac{s}{4}+\frac{\nu}{2}\right)}$, $\operatorname{Re} s > -2\operatorname{Re}\nu > 0$
10.66	$K_\mu(at)\,I_\mu(bt),\ \operatorname{Re} a > \operatorname{Re} b$	$\dfrac{2^{s-2}}{\sqrt{\pi ab}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) e^{\frac{-i\pi}{2}(s-1)} (a^2-b^2)^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}\, Q_{\mu-\frac{1}{2}}^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\right)$
10.67	$I_\nu(at)\,K_\mu(at),\ \operatorname{Re} a > 0$	$\dfrac{\Gamma\left(\frac{s+\mu+\nu}{2}\right) \mathrm{B}\left(1-s,\ \frac{s-\mu+\nu}{2}\right)}{2^{2-s}a^s\,\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-s}{2}+1\right)}$, $\operatorname{Re}(-\nu\pm\mu) < \operatorname{Re} s < 1$
10.68	$\mathbf{H}_\nu(at),\ a > 0$	$\dfrac{2^{s-1}\,\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{a^s\,\Gamma\left(\frac{\nu-s}{2}+1\right)}\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}(s+\nu)\right]$, $-1-\operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re} s < \min\left(\frac{3}{2},\ 1-\operatorname{Re}\nu\right)$

CHAPITRE XI

TRANSFORMATION DE BESSEL

§ 1. Transformation de Hankel

1.1. Formules fondamentales

n°	$f(t)$	$F(u; \nu) = \int_0^\infty f(t) J_\nu(ut) \sqrt{ut}\, dt,\ u > 0$
11.1	$\int_0^\infty F(u) J_\nu(ut) \sqrt{ut}\, du,\ \mathrm{Re}\, \nu > -\frac{1}{2}$	$F(u)$
11.2	$f(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a},\ \nu\right)$
11.3	$t^m f(t),\ m = 0, 1, 2, \ldots$	$u^{\frac{1}{2}-\nu} \left(\frac{d}{u\, du}\right)^m \left[u^{\nu-\frac{1}{2}+m} F(u; \nu+m)\right]$
11.3a	$t^{-\mu} f(t),\ \mathrm{Re}\, \nu + 1 > \mathrm{Re}\, \mu > 0$	$2^{1-\mu} [\Gamma(\mu)]^{-1} u^{\frac{1}{2}-\nu} \int_0^u \xi^{\nu-\mu+\frac{1}{2}} (u^2-\xi^2)^{\mu-1} F(\xi, \nu-\mu)\, d\xi$
11.4	$\frac{2\nu}{t} f(t)$	$uF(u; \nu-1) + uF(u; \nu+1)$

11.5	$t^{-\mu} f(t)$, $\operatorname{Re} \nu - \frac{3}{2} > \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{1-\mu} [\Gamma(\mu)]^{-1} u^{\nu+\frac{1}{2}} \int\limits_u^\infty \xi^{\frac{1}{2}-\mu-\nu} (\xi^2 - u^2)^{\mu-1} F(\xi; \nu+\mu)\, d\xi$
11.6	$2\nu f'(t)$	$\left(\nu - \frac{1}{2}\right) u F(u; \nu+1) - \left(\nu + \frac{1}{2}\right) u F(u; \nu-1)$
11.7	$t^{\frac{1}{2}-\nu} \left(\frac{d}{t\, dt}\right)^m [t^{\nu+m-\frac{1}{2}} f(t)]$, $m = 0, 1, 2, \ldots$	$u^m F(u; \nu+m)$
11.8	$t^{\frac{1}{2}+\nu} \left(\frac{d}{t\, dt}\right)^m [t^{m-\nu-\frac{1}{2}} f(t)]$, $m = 0, 1, 2, \ldots$	$(-u)^m F(u; \nu-m)$
11.9	$t^{\frac{1}{2}-\nu} \int\limits_0^t \xi^{\nu-\mu+\frac{1}{2}} (t^2 - \xi^2)^{\mu-1} f(\xi)\, d\xi$, $\operatorname{Re} \nu + \frac{1}{2} > \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu-1} \Gamma(\mu)\, u^{-\mu} F(u; \nu-\mu)$
11.10	$t^{\frac{1}{2}+\nu} \int\limits_t^\infty \xi^{\frac{1}{2}-\mu-\nu} (\xi^2 - t^2)^{\mu-1} f(\xi)\, d\xi$, $\operatorname{Re} \nu + 1 > \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu-1} \Gamma(\mu)\, u^{-\mu} F(u; \nu+\mu)$
11.11	$2^\lambda \Gamma(\lambda)\, t^{\frac{1}{2}-\nu} \times$ $\times \int\limits_0^t \xi^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu+\nu} (t^2 - \xi^2)^{\mu-1} f(\xi)\, d\xi$, $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} (\lambda+\mu) - \frac{1}{2}$	$2^\mu \Gamma(\mu)\, u^{\frac{1}{2}-\nu} \int\limits_0^u \xi^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu+\nu} (u^2 - \xi^2)^{\lambda-1} F(\xi; \nu-\lambda-\mu)\, d\xi$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u;\nu)=\int_0^\infty f(t)\,J_\nu(ut)\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.12	$2^\lambda\Gamma(\lambda)\,t^{\frac{1}{2}+\nu}\int_0^\infty \xi^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu-\nu}\times$ $\times(\xi^2-t^2)^{\mu-1}f(\xi)\,d\xi$, $\mathrm{Re}\,\lambda>0$, $\mathrm{Re}\,\mu>0$, $\mathrm{Re}\,\nu>\lvert\mathrm{Re}(\lambda-\mu)\rvert-1$	$2^\mu\Gamma(\mu)\,u^{\frac{1}{2}+\nu}\int_u^\infty \xi^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu-\nu}(\xi^2-u^2)^{\lambda-1}F(\xi,\nu+\lambda+\mu)\,d\xi$

1.2. Fonctions diverses

11.13	$\begin{cases}1 \text{ pour } 0<t<1,\\ 0 \text{ pour } t>1,\ \mathrm{Re}\,\nu>-\frac{3}{2}\end{cases}$	$\frac{\sqrt{2}}{u}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}+\left(\nu-\frac{1}{2}\right)J_\nu(u)\times$ $\times S_{-\frac{1}{2},\,\nu-1}(u)-J_{\nu-1}(u)\,S_{\frac{1}{2},\,\nu}(u)$
11.14	$\begin{cases}0 \text{ pour } 0<t<1,\\ 1 \text{ pour } t>1\end{cases}$	$J_{\nu-1}(u)\,S_{\frac{1}{2},\,\nu}(u)+\left(\frac{1}{2}-\nu\right)J_\nu(u)\,S_{-\frac{1}{2},\,\nu-1}(u)$
11.15	$\begin{cases}t^{\frac{1}{2}-\nu} & \text{pour } 0<t<1,\\ 0 & \text{pour } t>1\end{cases}$	$\frac{2^{1-\nu}u^{\nu-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\nu)}-\frac{1}{\sqrt{u}}\Gamma_{\nu-1}(u)$
11.16	$\begin{cases}t^{\nu+\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<1,\\ 0 & \text{pour } t>1,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{u}}J_{\nu+1}(u)$

11.17	$t^{\mu}, \quad -\operatorname{Re}\nu-\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\mu<-\frac{1}{2}$	$2^{\mu+\frac{1}{2}}u^{-\mu-1}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\frac{1}{4}\right)}$
11.18	$t^{\nu+\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-1}, \ \operatorname{Re}a>0, \ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$	$a^{\nu}u^{\frac{1}{2}}K_{\nu}(au)$
11.19	$t^{\nu-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-1},$ $\operatorname{Re}a>0, \ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{5}{2}$	$\dfrac{\pi a^{\nu-1}}{2}\sec(\pi\nu)\sqrt{u}\,[I_{\nu}(au)-\mathbf{L}_{-\nu}(au)]$
11.20	$t^{-\nu-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}},$ $\operatorname{Re}a>0, \ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$2^{\nu}a^{-2\nu}u^{\frac{1}{2}+\nu}\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}I_{\nu}\left(\frac{au}{2}\right)K_{\nu}\left(\frac{au}{2}\right)$
11.21	$t^{\nu+\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}, \ \operatorname{Re}a>0, \ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\dfrac{\pi^{\frac{1}{2}}u^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\nu}e^{au}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$
11.22	$t^{\nu+\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}, \ \operatorname{Re}a>0, \ \operatorname{Re}\nu>-1$	$\dfrac{u^{\nu+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\nu+1}ae^{au}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}$
11.23	$t^{\nu+\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\mu-1},$ $\operatorname{Re}a>0, \ -1<\operatorname{Re}\nu<2\operatorname{Re}\mu+\frac{3}{2}$	$\dfrac{a^{\nu-\mu}u^{\mu+\frac{1}{2}}}{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)}K_{\nu-\mu}(au)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u;\nu)=\int_0^\infty f(t)\,J_\nu(ut)\,\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.24	$\begin{cases} t^{\nu-\frac{1}{2}}(a^2-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$2^{\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)a^{2\nu}u^{\frac{1}{2}-\nu}\left[J_\nu\left(\frac{au}{2}\right)\right]^2$
11.25	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ t^{-\nu-\frac{1}{2}}(t^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert<\frac{1}{2}$	$-2^{-\nu-1}a^{-2\nu}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)u^{\nu+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\times$ $\times J_\nu\left(\frac{au}{2}\right)Y_\nu\left(\frac{au}{2}\right)$
11.26	$\begin{cases} t^{\nu+\frac{1}{2}}(a^2-t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert<\frac{1}{2}$	$2^{-\nu}\pi^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)u^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(au)$
11.27	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ t^{-\nu+\frac{1}{2}}(t^2-a^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert<\frac{1}{2}$	$2^{-\nu}\pi^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)u^{-\nu-\frac{1}{2}}\cos(au)$

11.28	$\begin{cases} t^{\frac{1}{2}-\nu}(a^2-t^2)^{\mu} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\mu>-1$	$\dfrac{2^{1-\nu}a^{\mu-\nu+1}\, s_{\nu+\mu,\,\mu-\nu+1}(au)}{u^{\mu+\frac{1}{2}}\,\Gamma(\nu)}$
11.29	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ t^{\frac{1}{2}-\nu}(t^2-a^2)^{\mu} & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\mu>-1,\ \operatorname{Re}(\nu-2\mu)>\frac{1}{2}$	$2^{\mu}\,\Gamma(\mu+1)\,a^{1+\mu-\nu}\,u^{-\mu-\frac{1}{2}}\,J_{\nu-\mu-1}(au)$
11.30	$\begin{cases} t^{\nu+\frac{1}{2}}(a^2-t^2)^{\mu} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu>-1$	$2^{\mu}\,\Gamma(\mu+1)\,u^{-\mu-\frac{1}{2}}\,a^{\nu+\mu+1}\,J_{\nu+\mu+1}(au)$
11.31	$t^{-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\left[(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\pm t\right]^{\mu}$, $\operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{3}{2}$	$u^{\frac{1}{2}}\,a^{\mu}\,I_{\frac{\nu\mp\mu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)K_{\frac{\nu\pm\mu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)$
11.32	$t^{-\mu-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\left[(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+a\right]^{\mu}$, $\operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}(\nu-\mu)>-1$	$\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{a\sqrt{u}\,\Gamma(\nu+1)}\,W_{\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}}(au)\,M_{-\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}}(au)$
11.33	$t^{\nu+\frac{5}{2}}(t^4+4a^4)^{-\nu-\frac{1}{2}}$, $\lvert\arg a\rvert<\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re}\nu>\frac{1}{6}$	$\dfrac{\pi^{\frac{1}{2}}\,u^{\frac{1}{2}+\nu}\,J_{\nu-1}(au)\,K_{\nu-1}(au)}{2^{3\nu-1}\,a^{2\nu-2}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u;\nu)=\int\limits_0^\infty f(t)\,J_\nu(ut)\,\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.34	$t^{\nu+\frac{1}{2}}(t^4+4a^4)^{-\nu-\frac{1}{2}}$, $\lvert\arg a\rvert<\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\dfrac{u^{\nu+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}J_\nu(au)K_\nu(au)}{a^{2\nu}2^{3\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$
11.35	$t^{m+\frac{1}{2}}e^{-at}$, $\operatorname{Re}\nu>-m-2$	$(-1)^{m+1}u^{\frac{1}{2}-\nu}\dfrac{d^{m+1}}{da^{m+1}}\{(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}[(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}-a]^\nu\}$
11.36	$t^{\nu+\frac{1}{2}}e^{-at}$, $\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\pi^{-\frac{1}{2}}2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)au^{\nu+\frac{1}{2}}(a^2+u^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}$
11.37	$t^{\nu-\frac{1}{2}}e^{-at}$, $\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\dfrac{2^\nu}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)u^{\nu+\frac{1}{2}}(a^2+u^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}$
11.38	$t^{\mu-\frac{3}{2}}e^{-at}$, $a>0$, $\operatorname{Re}(\mu+\nu)>0$	$u^{\frac{1}{2}}(a^2+u^2)^{-\frac{\mu}{2}}\Gamma(\mu+\nu)P_{\mu-1}^{-\nu}[a(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}]$
11.39	$t^{\nu+\frac{1}{2}}e^{-at^2}$, $\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\dfrac{u^{\nu+\frac{1}{2}}}{(2a)^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{u^2}{4a}\right)$
11.40	$t^{2n+\nu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{t^2}{4}}$, $\operatorname{Re}\nu>-1-2n$	$2^{2n+\nu+1}n!\,u^{\nu+\frac{1}{2}}e^{-u^2}L_n^\nu(u^2)$
11.41	$t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{a}{t}}$, $\operatorname{Re}a>0$	$2u^{\frac{1}{2}}J_\nu[(2au)^{\frac{1}{2}}]K_\nu[(2au)^{\frac{1}{2}}]$

11.42	$\begin{cases} t^{\nu+\frac{1}{2}} e^{a(1-t^2)} & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1, \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$	$(2ia)^{-\nu-1} u^{\nu+\frac{1}{2}} [U_{\nu+1}(2ia, u) - iU_{\nu+2}(2ia, u)]$
11.43	$t^{\nu+\frac{1}{2}} \exp[-a(t^2+b^2)^{\frac{1}{2}}]$, $\mathrm{Re}\,a>0$, $\mathrm{Re}\,b>0$, $\mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} a b^{\nu+\frac{3}{2}} u^{\nu+\frac{1}{2}} (u^2+a^2)^{-\nu-\frac{3}{4}} K_{\nu+\frac{3}{2}}[b(u^2+a^2)^{\frac{1}{2}}]$
11.44	$t^{\nu+\frac{1}{2}} (b^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp[ia(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$, $a>0$, $\mathrm{Re}\,b>0$, $-1<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{1}{2}$	$\begin{cases} i2^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} b^{\nu+\frac{1}{2}} (a^2-u^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} u^{\nu+\frac{1}{2}} H^{(1)}_{-\nu-\frac{1}{2}}[b(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}] \\ \qquad \text{pour } 0<u<a, \\ 2^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}+\nu} u^{\frac{1}{2}+\nu} (u^2-a^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \times \\ \times K_{\nu+\frac{1}{2}}[b(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}] \ \text{pour } u>a \end{cases}$
11.45	$t^{\nu+\frac{1}{2}} (b^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp[-a(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}]$, $\mathrm{Re}\,a>0$, $\mathrm{Re}\,b>0$, $\mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} b^{\nu+\frac{1}{2}} u^{\nu+\frac{1}{2}} (a^2+u^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \times$ $\times K_{\nu+\frac{1}{2}}[b(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}]$
11.46	$t^{\mu} \ln t$, $-\mathrm{Re}\,\nu-\frac{3}{2}<\mathrm{Re}\,\mu<0$	$\frac{2^{\mu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\frac{1}{4}\right) u^{\mu+1}} \left[\psi\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)+\right.$ $\left. + \psi\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\frac{1}{4}\right) - \ln\left(\frac{u^2}{4}\right)\right]$

Suite

nº	$f(t)$	$F(u;\nu)=\int_0^\infty f(t)\,J_\nu(ut)\sqrt{ut}\,dt \quad u>0$
11.47	$t^{\mu-\frac{3}{2}}\sin(at),\ a>0,\ -\mathrm{Re}\,\nu<\mathrm{Re}\,\mu<\frac{3}{2}$	$\begin{cases} \dfrac{u^{\nu+\frac{1}{2}}\,\Gamma(\nu+\mu)\sin\left[\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right]}{2^{\nu}a^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)}\times \\ \times\,{}_2F_1\left(\frac{1+\nu+\mu}{2},\ \frac{\nu+\mu}{2};\ \nu+1;\ \frac{u^2}{a^2}\right)\ \text{pour } 0<u<a, \\ \dfrac{2^{\mu}a\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu+\mu}{2}\right)}{u^{\mu+\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu-\mu}{2}\right)}\,{}_2F_1\left(\frac{1+\nu+\mu}{2},\ \frac{+\mu-\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{a^2}{u^2}\right) \\ \text{pour } u>a \end{cases}$
11.48	$t^{\nu-\frac{1}{2}}(t^2+b^2)^{-1}\sin(at)$, $a>0,\ \mathrm{Re}\,b>0,\ -1<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{3}{2}$	$b^{\nu-1}\,\mathrm{sh}(ab)\,u^{\frac{1}{2}}K_\nu(bu),\ u\geqslant a$
11.49	$t^{\frac{1}{2}-\nu}(t^2+b^2)^{-1}\sin(at)$, $a>0,\ \mathrm{Re}\,b>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2b^{\nu}}e^{-ab}\,u^{\frac{1}{2}}I_\nu(bu),\ 0<u\leqslant a$
11.50	$t^{\nu+\frac{1}{2}}\sin(at^2),\ a>0,\ -2<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{u^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^{\nu+1}a^{\nu+1}}\cos\left(\frac{u^2}{4a}-\frac{\nu\pi}{2}\right)$

11.51	$t^{\mu-\frac{3}{2}}\cos(at),\ a>0,\ -\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\mu<\frac{3}{2}$	$\begin{cases} \dfrac{u^{\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+\mu)\cos\left[\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right]}{2^{\nu}a^{\nu+\mu}\Gamma(\nu+1)}\times \\ \times\,{}_2F_1\left(\dfrac{\mu+\nu}{2},\ \dfrac{\nu+\mu+1}{2};\ \nu+1;\ \dfrac{u^2}{a^2}\right) \text{ pour } 0<u<a, \\ \dfrac{2^{\mu-1}u^{\frac{1}{2}-\mu}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)}\,{}_2F_1\left(\dfrac{\mu+\nu}{2};\ \dfrac{\mu-\nu}{2};\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{a^2}{u^2}\right) \\ \text{pour } u>a \end{cases}$
11.52	$t^{\nu+\frac{1}{2}}(t^2+b^2)^{-1}\cos(at),\ a>0,\ \operatorname{Re}b>0,$ $-1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$b^{\nu}\operatorname{ch}(ab)\,u^{\frac{1}{2}}K_{\nu}(bu),\ u\geqslant a$
11.53	$t^{-\nu-\frac{1}{2}}(t^2+b^2)^{-1}\cos(at),$ $a>0,\ \operatorname{Re}b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}$	$\frac{\pi}{2}b^{-\nu-1}e^{-ab}u^{\frac{1}{2}}I_{\nu}(bu),\ 0<u\leqslant a$
11.54	$t^{\nu+\frac{1}{2}}\cos(at^2),\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\dfrac{u^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^{\nu+1}a^{\nu+1}}\sin\left(\dfrac{u^2}{4a}-\dfrac{\pi\nu}{2}\right)$
11.55	$t^{\nu+\frac{1}{2}}(t^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}\cos\left[a(t^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\right],$ $a>0,\ b>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{5}{2}$	$u^{\frac{1}{2}}b^{\nu}K_{\nu}(bu),\ u>a$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u;\nu)=\int_0^\infty f(t)\,J_\nu(ut)\,\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.56	$t^{\nu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi t}{2}}\operatorname{csch}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\pi^{-\frac{1}{2}}2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)u^{\nu+\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(n^2\pi^2+u^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}$
11.57	$t^{\nu+\frac{1}{2}}\operatorname{sh}(at)\operatorname{csch}(\pi t)$, $\lvert\operatorname{Re}a\rvert<\pi$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{2}{\pi}u^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{\nu+1}\sin(na)\,K_\nu(nu)$
11.58	$t^{-\frac{1}{2}}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sh}(2\mu\operatorname{Arsh}t)$, $\operatorname{Re}\nu>-1$, $\lvert\operatorname{Re}\mu\rvert<\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{u}}{2}\left[I_{\frac{\nu}{2}-\mu}\left(\frac{u}{2}\right)K_{\frac{\nu}{2}+\mu}\left(\frac{u}{2}\right)-I_{\frac{\nu}{2}+\mu}\left(\frac{u}{2}\right)K_{\frac{\nu}{2}-\mu}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
11.59	$t^{-\frac{1}{2}}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(2\mu\operatorname{Arsh}t)$, $\operatorname{Re}\nu>-1$, $\lvert\operatorname{Re}\mu\rvert<\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{u}}{2}\left[I_{\frac{\nu}{2}-\mu}\left(\frac{u}{2}\right)K_{\frac{\nu}{2}+\mu}\left(\frac{u}{2}\right)+I_{\frac{\nu}{2}+\mu}\left(\frac{u}{2}\right)K_{\frac{\nu}{2}-\mu}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$
11.60	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<1,\\ t^{-\frac{1}{2}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(\mu\operatorname{Arch}t)\end{cases}$ pour $t<1$, $\lvert\operatorname{Re}\mu\rvert<\frac{3}{2}$	$-\frac{\pi}{4}\sqrt{u}\left[J_{\frac{\mu+\nu}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)Y_{\frac{\nu-\mu}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)+J_{\frac{\nu-\mu}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)Y_{\frac{\nu+\mu}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$

11.61	$\begin{cases} t^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(t) & \text{pour } 0<t<1, \\ 0 & \text{pour } t>1, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\nu > -n-1$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{u}\, J_{\frac{\nu+n}{2}}\left(\frac{u}{2}\right) J_{\frac{\nu-n}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)$
11.62	$t^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-t^2} L_n^{(\nu)}(t^2)$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$2^{-2n-\nu-1}(n!)^{-1} u^{2n+\nu+\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)$
11.63	$t^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} L_n^{(\nu)}(t^2)$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$(-1)^n e^{-\frac{u^2}{2}} u^{\nu+\frac{1}{2}} L_n^{\nu}(u^2)$
11.64	$t^{2n+\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} L_n^{(\nu+n)}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$u^{2n+\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} L_n^{\nu+n}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
11.65	$t^{\nu+\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{\frac{\nu}{2}} P_\nu\left[\frac{t^2+2a^2}{2a(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$, $\operatorname{Re} a > 0$, $-1 < \operatorname{Re}\nu < 0$	$\frac{(2a)^{\nu+1} u^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\pi\Gamma(-\nu)}\left[K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right]^2$
11.66	$t^{\frac{1}{2}}\{P_\mu^{-\frac{\nu}{2}}[(1+a^2t^2)^{\frac{1}{2}}]\}^2$, $\operatorname{Re} a > 0$, $-\frac{3}{4} < \operatorname{Re}\mu < -\frac{1}{4}$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\frac{2\left[K_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2a}\right)\right]^2}{\pi a\,\Gamma\left(1+\mu+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) u^{\frac{1}{2}}}$
11.67	$Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left[\frac{(a^2+t^2)}{t}\right]$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$2^{-\frac{1}{2}}\pi u^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\left(a^2-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} u\right] J_\nu\left(\frac{u}{2}\right)$

Suite

nº	$f(t)$	$F(u;\nu)=\int_0^\infty f(t)\,J_\nu(ut)\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.68	$t^{-\nu-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\,Q_\mu^{\frac{1}{2}-\nu}\left(1+\frac{2a^2}{t^2}\right)$, $\operatorname{Re} a>0,\ 0<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\mu+\frac{3}{2}$	$\dfrac{ie^{-i\pi\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu-\nu+\frac{3}{2}\right)}{2^\nu a^{\nu+\frac{1}{2}}\,\Gamma(2\nu)}\,u^{-\nu-\frac{3}{2}}\,M_{\mu+\frac{1}{2},\,\nu-\frac{1}{2}}(au)\times$ $\times\,W_{-\mu-\frac{1}{2},\,\nu-\frac{1}{2}}(au)$
11.69	$t^{\frac{1}{2}}P_\mu^{-\frac{\nu}{2}}\left[(1+a^2t^2)^{\frac{1}{2}}\right]Q_\mu^{-\frac{\nu}{2}}\left[(1+a^2t^2)^{\frac{1}{2}}\right]$, $\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{3}{4},\ \operatorname{Re}\nu>-1$	$\dfrac{e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}\,\Gamma\left(1+\mu+\frac{\nu}{2}\right)}{a\,\Gamma\left(1+\mu-\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{u}}\,I_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2a}\right)K_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2a}\right)$
11.70	$t^{-2\lambda-\frac{1}{2}}J_\nu(at),\ a>0,\ \operatorname{Re}\nu+\frac{1}{2}>\operatorname{Re}\lambda>-\frac{1}{2}$	$\dfrac{a^\nu u^{\nu+\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\nu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{2^{2\lambda}(a+u)^{2\nu-2\lambda+1}\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\times$ $\times\,{}_2F_1\left[\nu-\lambda+\frac{1}{2},\ \nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ \frac{4au}{(a+u)^2}\right]$
11.71	$t^{\frac{1}{2}}(t^2+b^2)^{-1}J_\nu(at)$, $a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1$	$\sqrt{u}\,I_\nu(bu)\,K_\nu(ab)$ pour $0<u<a$, $\sqrt{u}\,I_\nu(ab)\,K_\nu(bu)$ pour $u>a$
11.72	$t^{\nu-\mu+\frac{1}{2}}(b^2+t^2)^{-1}J_\mu(at),\ a>0,\ \operatorname{Re} b>0$, $1+\operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}\nu>-1$	$b^{\nu-\mu}u^{\frac{1}{2}}\,I_\mu(ab)\,K_\nu(bu),\ u>a$

11.73	$t^{\mu-\nu+\frac{1}{2}}(t^2+b^2)^{-1} J_\mu(at)$, $a>0$, $\mathrm{Re}\, b>0$, $1+\mathrm{Re}\,\nu>\mathrm{Re}\,\mu>-1$	$\sqrt{u}\, b^{\mu-\nu} I_\nu(bu) K_\mu(ab)$, $0<u<a$
11.74	$t^{\lambda+\frac{1}{2}} e^{-at^2} J_\mu(bt)$, $\mathrm{Re}\, a>0$, $\mathrm{Re}(\mu+\nu+\lambda)>-2$	$\sqrt{u} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m+\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{\lambda}{2}\right)}{m!\,\Gamma(m+\mu+1)} \left(-\frac{b^2}{4a}\right)^m \times$ $\times\, {}_2F_1\left(-m,\ -\mu-m;\ \nu+1;\ \frac{u^2}{b^2}\right)$
11.75	$t^{2n-\mu-\frac{3}{2}}(t^2+c^2)^{-1} J_\nu(at) J_\mu(bt)$, $a>b>0$, $\mathrm{Re}\,\nu>\frac{1}{2}-n$, $\mathrm{Re}\,\mu>2n-\frac{9}{2}$	$(-1)^{n+1} c^{2n-\mu-2} \sqrt{u}\, I_\mu(bc) I_\nu(cu) K_\nu(ac)$, $0<u<a-b$
11.76	$t^{\frac{1}{2}}(t^2+b^2)^{-1}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)\right] J_\mu(at)+\right.$ $\left.+\sin\left[\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)\right] Y_\mu(at)\right\}$, $a>0$, $\mathrm{Re}\, b>0$, $\mathrm{Re}(\nu\pm\mu)>-2$	$\sqrt{u}\, I_\nu(bu) K_\mu(ab)$, $0<u\leqslant a$
11.77	$t^{\rho+\frac{1}{2}}(b^2+t^2)^{-1}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}(\rho-\mu+\nu)\right](J_\mu at)+\right.$ $\left.+\sin\left[\frac{\pi}{2}(\rho-\mu+\nu)\right] Y_\mu(at)\right\}$, $a>0$, $\mathrm{Re}\, b>0$, $\mathrm{Re}(\nu\pm\mu+\rho)>-2$, $\mathrm{Re}\,\rho<1$	$b^\rho \sqrt{u}\, I_\nu(bu) K_\mu(ab)$, $0<u<a$
11.78	$t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{at^2}{4}\right)$, $a>0$, $\mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\frac{2\sqrt{u}}{a} J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{a}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u;\nu)=\int_0^\infty f(t)\,J_\nu(ut)\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.79	$t^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{at^2}{4}\right)J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{bt^2}{4}\right)$, $\operatorname{Re}a>\lvert\operatorname{Im}b\rvert$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{2\sqrt{u}}{\sqrt{a^2+b^2}}\exp\left(-\frac{au^2}{a^2+b^2}\right)J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{bu^2}{a^2+b^2}\right)$
11.80	$t^{\frac{1}{2}}\left[J_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{at^2}{4}\right)\right]^2$, $a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$-\frac{\sqrt{u}}{a}J_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)Y_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)$
11.81	$t^{-2\nu}J_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{a}{t}\right)$, $a>0$, $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<3$	$-\frac{i}{2}\operatorname{cosec}(2\pi\nu)\left(\frac{u}{a}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}[e^{2\pi\nu i}J_{1-2\nu}(x)J_{2\nu-1}(y)-$ $-e^{-2\pi\nu i}J_{2\nu-1}(x)J_{1-2\nu}(y)]$, $x=\left(\frac{au}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $y=\left(\frac{au}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
11.82	$t^{\frac{1}{2}}(t^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{a^2b}{t^2+b^2}\right)\times$ $\times J_\nu\left(\frac{a^2t}{t^2+b^2}\right)$, $\operatorname{Re}b>0$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{e^{-bu}}{\sqrt{u}}J_{2\nu}(2a\sqrt{u})$
11.83	$J_{2\nu-1}(a\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{a}{2}u^{-\frac{3}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{a^2}{4u}\right)$
11.84	$t^{-\frac{1}{2}}J_{2\nu}(a\sqrt{t})$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{u}}J_{\nu}\left(\frac{a^2}{4u}\right)$

11.85	$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-bt} J_{2\nu}(2a\sqrt{t})$, $\operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$u^{\frac{1}{2}} (u^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{a^2 b}{u^2+b^2}\right) J_\nu\left(\frac{a^2 u}{u^2+b^2}\right)$
11.86	$\sqrt{t}\, Y_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{at^2}{4}\right)$, $a>0$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$-\frac{2}{a}\sqrt{u}\, \mathbf{H}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{a}\right)$
11.87	$t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{at^2}{4}\right) Y_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{at^2}{4}\right)$, $a>0$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$-\frac{2}{a}\sqrt{u}\left[J_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)\right]^2$
11.88	$\sqrt{t}\, e^{-bt^2} I_\nu(at)$, $\operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\frac{\sqrt{u}}{2b}\exp\left(\frac{a^2-u^2}{4b}\right) J_\nu\left(\frac{au}{2b}\right)$
11.89	$t^{\mu+\nu+\frac{1}{2}} K_\mu(at)$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}(\nu+1) > \lvert\operatorname{Re}\mu\rvert$	$\frac{2^{\nu+\mu}\Gamma(\mu+\nu+1)\, u^{\nu+\frac{1}{2}}}{a^{-\mu}(u^2+a^2)^{\mu+\nu+1}}$
11.90	$t^{\nu+\frac{1}{2}} J_\nu(at) K_\nu(bt)$, $\operatorname{Re} b > \lvert\operatorname{Im} a\rvert$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\frac{2^{3\nu}(ab)^\nu u^{\nu+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}[(a^2+b^2+u^2)^2-4a^2u^2]^{\nu+\frac{1}{2}}}$
11.91	$t^{\mu+\frac{1}{2}} J_\nu(bt) K_\mu(at)$, $\operatorname{Re} a > \lvert\operatorname{Im} b\rvert$, $\operatorname{Re}\nu > -1$, $\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1$	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} a^\mu b^{-\mu-1} u^{-\mu-\frac{1}{2}} \times$ $\times e^{-i\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\pi}(y^2-1)^{-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(y)$, $2byu = a^2+b^2+u^2$
11.92	$t^{\frac{1}{2}} I_{\frac{\nu-\mu}{2}}\left(\frac{at}{2}\right) K_{\frac{\nu+\mu}{2}}\left(\frac{at}{2}\right)$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -1$, $\operatorname{Re}(\nu-\mu) > -2$	$\frac{[u+(u^2+a^2)^{\frac{1}{2}}]^\mu}{a^\mu\sqrt{u(u^2+a^2)}}$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u,\nu)=\int_0^\infty f(t)\,J_\nu(ut)\,\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.93	$t^{\nu+\frac{1}{2}}K_\mu(at)\,K_\mu(bt)$, $\operatorname{Re} a>0$, $\operatorname{Re} b>0$, $\operatorname{Re}(\nu\pm\mu)>-1$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\dfrac{\pi^{\frac{1}{2}}u^{\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+\mu+1)\,\Gamma(\nu-\mu+1)}{2^{\frac{3}{2}}(ab)^{\nu+1}(u^2-1)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}}}P_{\mu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\frac{1}{2}}(x)$, $2abx=u^2+b^2+a^2$
11.94	$t^{\frac{1}{2}-\nu}\exp\left(-\frac{a^2t^2}{4}\right)I_\nu\left(\frac{a^2t^2}{4}\right)$, $\lvert\arg a\rvert<\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{u^{\nu-\frac{1}{2}}}{a}\exp\left(-\frac{u^2}{4a^2}\right)D_{-2\nu}\left(\frac{u}{a}\right)$
11.95	$t^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{at^2}{4}\right)I_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{at^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re} a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\left(\frac{\pi a u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{u^2}{2a}\right)$
11.96	$t^{\frac{1}{2}}K_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{at^2}{4}\right)$, $\operatorname{Re} a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\dfrac{\pi\sqrt{u}}{a}\left[I_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{a}\right)-\mathbf{L}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{a}\right)\right]$
11.97	$t^{\frac{1}{2}}I_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{at^2}{4}\right)K_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{at^2}{4}\right)$, $\operatorname{Re} a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\dfrac{\sqrt{u}}{a}I_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)K_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)$

11.98	$t^{\frac{1}{2}} J_\nu(2\sqrt{at})\, K_\nu(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\dfrac{u^{-\frac{3}{2}}}{2} e^{-\frac{2a}{u}}$
11.99	$t^{\nu+\frac{1}{2}} J_{2\nu}(2\sqrt{at})\, K_{2\nu}(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$2^\nu \pi^{-\frac{1}{2}} a^{\nu+\frac{1}{2}} u^{-2\nu-2} K_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{2a}{u}\right)$
11.100	$t^{-\nu-\frac{1}{2}} J_{2\nu+1}(2\sqrt{at})\, K_{2\nu+1}(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\nu-2} a^{-\nu-\frac{1}{2}} u^{2\nu} \left[I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2a}{u}\right) - \mathbf{L}_\nu\left(\frac{2a}{u}\right) \right]$
11.101	$t^{-\frac{1}{2}} \left[K_{2\nu}(2\sqrt{at}) - \frac{\pi}{2} I_{2\nu}(2\sqrt{at}) \right]$, $a > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{2} u^{-\frac{1}{2}} Y_\nu\left(\frac{a}{u}\right)$
11.102	$t^{-\frac{1}{2}} K_\nu(2\sqrt{at})\, Y_\nu(2\sqrt{at})$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{u}}{4a} W_{\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{2a}{u}\right) W_{-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{2a}{u}\right)$
11.103	$\mathbf{H}_{\nu-\frac{1}{2}}(at)$, $a > 0$, $-1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a^{\nu-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}-\nu} (a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0 < u < a, \\ 0 & \text{pour } u > a \end{cases}$
11.104	$t^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{at^2}{4}\right)$, $a > 0$, $-2 < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}$	$-\frac{2}{a}\sqrt{u}\, Y_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{a}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F_{-}(u;\,\nu)=\int_0^\infty f(t)\,J_\nu(ut)\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.105	$t^{\frac{1}{2}}\,[\mathbf{H}_{-\nu}(at)-Y_{-\nu}(at)]\quad \lvert\arg a\rvert<\pi,\ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu$	$\frac{2}{\pi a^{\nu}}\cos(\pi\nu)\,\frac{u^{\nu-\frac{1}{2}}}{u+a}$
11.106	$t^{-\frac{1}{2}}\left[\mathbf{H}_{-\nu}\left(\frac{a}{t}\right)-Y_{-\nu}\left(\frac{a}{t}\right)\right],\ \lvert\arg a\rvert<\pi,\ \lvert\operatorname{Re}\nu\rvert<\frac{1}{2}$	$\frac{4}{\pi}\cos(\pi\nu)\,\frac{1}{\sqrt{u}}\,K_{2\nu}(2\sqrt{au})$
11.107	$t^{\nu-\mu-\frac{1}{2}}\,[I_\mu(at)-\mathbf{L}_\mu(at)],\ \operatorname{Re}a>0,\ \lvert\operatorname{Re}\nu\rvert<\frac{1}{2}$	$\frac{2^{\nu-\mu}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)a^{\mu}}{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(1+\mu)\,u^{\nu+\frac{1}{2}}}\;{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu,\ \frac{1}{2};\ 1+\mu;\ -\frac{a^2}{u^2}\right)$
11.108	$t^{\nu-\mu+\frac{1}{2}}\,[I_\mu(at)-\mathbf{L}_{-\mu}(at)],\ \operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\nu-\mu)>-1,\ \operatorname{Re}(\nu-2\mu)<\frac{1}{2}$	$2^{2+\nu-\mu}\,\pi^{-\frac{3}{2}}\cos(\pi\mu)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu-\mu\right)a^{1-\mu}u^{-\frac{5}{2}+2\mu-\nu}\times$ $\times\,{}_2F_1\left(\frac{3}{2}+\nu-\mu,\ 1;\ \frac{3}{2};\ -\frac{a^2}{u^2}\right)$

11.109	$t^{\mu+\nu-\frac{1}{2}}[I_\mu(at)-\mathbf{L}_{-\mu}(at)$, $\operatorname{Re} a>0$, $-1<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}$, $\operatorname{Re}(\mu+\nu)>-\frac{1}{2}$	$\dfrac{2^{\mu+\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\nu\right)}{\Gamma(1+\mu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}a^\mu u^{-\frac{1}{2}-2\mu-2\nu}\times$ $\times\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\mu+\nu,\frac{1}{2}+\mu;\ 1+\mu;\ \frac{a^2}{u^2}\right)$
11.110	$t^{2\nu}\left[I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{t}\right)-\mathbf{L}_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{t}\right)\right]$, $\operatorname{Re} a>0$, $-1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$2^{\frac{3}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}u^{-\nu-\frac{1}{2}}a^{\nu+\frac{1}{2}}J_{2\nu+1}(\sqrt{2au})\,K_{2\nu+1}(\sqrt{2au})$
11.111	$t^{\nu+\frac{1}{2}}U_{\nu+1}(2a^2b, at)$, $a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\begin{cases}(2b)^{\nu+1}u^{\nu+\frac{1}{2}}\cos[b(a^2-u^2)] & \text{pour } 0<u<a,\\ 0 & \text{pour } u>a\end{cases}$
11.112	$t^{\nu+\frac{1}{2}}U_{\nu+2}(2a^2b, at)$, $a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\begin{cases}(2b)^{\nu+1}u^{\nu+\frac{1}{2}}\sin[b(a^2-u^2)] & \text{pour } 0<u<a,\\ 0 & \text{pour } u>a\end{cases}$
11.113	$t^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)D_{2\nu-1}(t)$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sec(\pi\nu)\,u^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)[D_{2\nu-1}(u)-D_{2\nu-1}(-u)]$
11.114	$t^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)\{[1-2\cos(\pi\nu)]\,D_{2\nu-1}(t)-$ $-D_{2\nu-1}(-t)\}$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$u^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)\{[1-2\cos(\pi\nu)]\,D_{2\nu-1}(u)-D_{2\nu-1}(-u)\}$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u;\,\nu)=\int\limits_0^\infty f(t)\,J_\nu(ut)\,\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.115	$t^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)\{[1+2\cos(\pi\nu)]\,D_{2\nu-1}(t)-D_{2\nu-1}(-t)\}$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$-u^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)\{[1+2\cos(\pi\nu)]\,D_{2\nu-1}(u)-D_{2\nu-1}(-u)\}$
11.116	$t^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)D_{-2\nu}(t)$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}-\nu}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)I_\nu\left(\frac{u^2}{4}\right)$
11.117	$t^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{t^2}{4}\right)D_{-2\nu}(t)$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$u^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{u^2}{4}\right)D_{-2\nu}(u)$
11.118	$t^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{t^2}{4}\right)D_{-2\nu-2}(t)$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$	$\frac{u^{\nu+\frac{1}{2}}}{2\nu-1}\exp\left(\frac{u^2}{4}\right)D_{-2\nu-1}(u)$
11.119	$t^{\nu+\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)D_{2\nu}(t)$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{1}{2}\sec(\pi\nu)\,u^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)[D_{2\nu+1}(u)-D_{2\nu+1}(-u)]$
11.120	$t^{\nu+\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)D_{2\nu+2}(t)$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$-\frac{1}{2}\sec(\pi\nu)\,u^{\nu+\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)[D_{2\nu+2}(u)+D_{2\nu+2}(-u)]$
11.121	$t^{\nu+\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{a^2t^2}{4}\right)D_{2\mu}(at)$, $\lvert\arg a\rvert<\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\frac{2^\mu\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)u^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu-\mu+\frac{3}{2}\right)a^{2\nu+2}}\,{}_1F_1\left(\nu+\frac{3}{2};\ \nu-\mu+\frac{3}{2};\ -\frac{u^2}{2a^2}\right)$

11.122	$\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) M_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4},\ \frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}}(t^2)$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\frac{(2\nu+1)}{2^\nu} u^{\nu-\frac{1}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2}\right)$
11.123	$t^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) M_{\frac{\nu+1}{2},\ \frac{\nu+1}{2}}(t^2)$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\frac{\Gamma(\nu+2)\, u^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) 2^\nu} \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2}\right)$
11.124	$t^{2\mu-\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) M_{3\mu-\nu+\frac{1}{2},\ \mu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}(4\mu-\nu) > -\frac{1}{2}$	$u^{2\mu-\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) M_{3\mu-\nu+\frac{1}{2},\ \mu}\left(\frac{u^2}{2}\right)$
11.125	$t^{\nu-2\mu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) M_{\nu-\mu,\ \mu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\frac{\Gamma(2\mu+1)}{2^{\nu-\mu}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} u^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) D_{2\nu-4\mu}(u)$
11.126	$t^{-\lambda-1}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) M_{\lambda+\mu,\ \mu}\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $\lambda = 2\mu-\nu-\frac{1}{2}$, $-1 < \operatorname{Re}\nu < 4\operatorname{Re}\mu$	$\pi^{-\frac{1}{2}}\, 2^{-5\left(\mu+\frac{\nu}{3}\right)} \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(4\mu-\nu)} u^{\lambda+2\mu}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) K_\lambda\left(\frac{u^2}{4}\right)$
11.127	$t^{\nu+\frac{1}{2}}\operatorname{erfc}(at)$, $\lvert\arg a\rvert < \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$a^{-\nu}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\nu+2)} u^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{u^2}{8a^2}\right) M_{\frac{\nu+1}{2},\ \frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{u^2}{4a^2}\right)$
11.128	$t^{\nu-\frac{1}{2}}\operatorname{erfc}(at)$, $\arg a\rvert < \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$2^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}-\nu} \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{u}\exp\left(-\frac{u^2}{8a^2}\right) M_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4},\ \frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}}\left(\frac{u^2}{4a^2}\right)$

§ 2. Transformation de Meijer

2.1. Formules fondamentales

n°	$f(t)$	$F_\nu(u) = \int_0^\infty f(t)(ut)^{\frac{1}{2}} K_\nu(ut)\,dt$
11.129	$\frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_\nu(u) I_\nu(tu) \sqrt{tu}\,du$	$F_\nu(u)$
11.130	$f(at),\ a>0$	$\frac{1}{a} F_\nu\left(\frac{u}{a}\right)$
11.131	$t^m f(t),\ m=0,\ 1, 2, \ldots$	$u^{\frac{1}{2}-\nu}\left(-\frac{d}{u\,du}\right)^m [u^{m+\nu-\frac{1}{2}} F_{\nu+m}(u)]$
11.132	$t^{-\mu} f(t),\ \mathrm{Re}\,\mu>0$	$\frac{2^{1-\mu}}{\Gamma(\mu)} u^{\nu+\frac{1}{2}} \int_u^\infty \xi^{\frac{1}{2}-\mu-\nu} (\xi^2-u^2)^{\mu-1} F_{\nu+\mu}(\xi)\,d\xi$
11.133	$2\nu f'(t)$	$\left(\nu-\frac{1}{2}\right) uF_{\nu+1}(u) - \left(\nu+\frac{1}{2}\right) uF_{\nu-1}(u)$
11.134	$t^{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m [t^{m+\nu-\frac{1}{2}} f(t)]$, $m=0, 1, 2, \ldots$	$u^m F_{\nu+m}(u)$
11.135	$t^{\frac{1}{2}+\nu}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m [t^{m-\nu-\frac{1}{2}} f(t)]$, $m=0, 1, 2, \ldots$	$u^m F_{\nu-m}(u)$

11.136	$t^{\frac{1}{2}-\nu}\int_0^t \xi^{\nu-\mu+\frac{1}{2}}(t^2-\xi^2)^{\mu-1}\times$ $\times f(\xi)\,d\xi$, $\operatorname{Re}\mu>0$	$\dfrac{2^{\mu-1}\Gamma(\mu)}{u^{\mu}}F_{\nu-\mu}(u)$

2.2. Fonctions diverses

11.137	$t^{\mu-1}$, $\operatorname{Re}\mu>\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert-\frac{1}{2}$	$2^{\mu-\frac{3}{2}}u^{-\mu}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)$, $\operatorname{Re}u>0$
11.138	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<a,\\ t^{\nu+\frac{1}{2}} & \text{pour } a<t<\infty\end{cases}$	$a^{\nu+1}u^{-\frac{1}{2}}K_{\nu+1}(au)$, $\operatorname{Re}u>0$
11.139	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<a,\\ t^{\mu+\frac{1}{2}} & \text{pour } a<t<\infty\end{cases}$	$au^{-\frac{1}{2}-\mu}e^{\frac{-i\pi\mu}{2}}[K_{\nu-1}(au)S_{\mu+1,\nu}(iau)+i(\nu+\mu)K_{\nu}(au)\times$ $\times S_{\mu,\nu-1}(iau)]$, $\operatorname{Re}u>0$
11.140	$\dfrac{t^{\mu-\frac{1}{2}}}{t+a}$, $\lvert\arg a\rvert<\pi$, $\operatorname{Re}\mu>\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert-1$	$2^{\mu-2}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)u^{\frac{1}{2}-\mu}\times$ $\times{}_1F_2\left(1;1-\frac{\mu+\nu}{2},1-\frac{\mu-\nu}{2};\frac{a^2u^2}{4}\right)-$ $-2^{\mu-3}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}-\frac{1}{2}\right)au^{\frac{3}{2}-\mu}\times$ $\times{}_1F_2\left(1;\frac{3-\mu-\nu}{2},\frac{3-\mu+\nu}{2},\frac{a^2u^2}{4}\right)-$ $-\pi a^{\mu}u^{\frac{1}{2}}\operatorname{cosec}[\pi(\mu-\nu)]\{K_{\nu}(au)+$ $+\pi\cos(\pi\mu)\operatorname{cosec}[\pi(\nu+\mu)]I_{\nu}(au)\}$, $\operatorname{Re}u>0$

Suite

n°	$f(t)$	$F_\nu(u)=\int_0^\infty f(t)(ut)^{\frac{1}{2}}K_\nu(ut)\,dt$
11.141	$t^{-\frac{1}{2}}(t+a)^{-1}$ $\lvert\arg a\rvert<\pi,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi^2}{2}[\operatorname{cosec}(\pi\nu)]^2 u^{\frac{1}{2}}[I_\nu(au)+I_{-\nu}(au)-e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}\mathbf{J}_\nu(iau)-$ $-e^{\frac{i\nu\pi}{2}}\mathbf{J}_{-\nu}(iau)],\ \operatorname{Re}u>0$
11.142	$t^{-\frac{1}{2}}(a^2+t^2)^{-\frac{1}{2}},\ \operatorname{Re}a>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{\pi^2}{8}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)u^{\frac{1}{2}}\left\{\left[J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right]^2+\left[Y_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right]^2\right\},$ $\operatorname{Re}u>0$
11.143	$t^{-\frac{1}{2}-\nu}(t^2+a^2)^{-1},\ \operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{\pi^2}{4}\sec(\pi\nu)\,a^{-\nu-1}u^{\frac{1}{2}}\{\mathbf{H}_\nu(au)-Y_\nu(au)\},\ \operatorname{Re}u>0$
11.144	$t^{\frac{1}{2}+\nu}(t^2+a^2)^{\mu},\ \operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1$	$2^\nu\Gamma(\nu+1)\,a^{\nu+\mu+1}u^{-\frac{1}{2}-\mu}S_{\mu-\nu,\,\mu+\nu+1}(au),\ \operatorname{Re}u>0$
11.145	$\begin{cases}[t(a^2-t^2)]^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<a,\\ 0 & \text{pour } t>a,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\end{cases}$	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{\nu-1}a^{2\nu}u^{\frac{1}{2}-\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)I_\nu\left(\frac{au}{2}\right)K_\nu\left(\frac{au}{2}\right)$
11.146	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<a,\\ [t(t^2-a^2)]^{\nu-\frac{1}{2}} & \text{pour } t>a,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\end{cases}$	$\pi^{-\frac{1}{2}}2^{\nu-1}a^{2\nu}u^{\frac{1}{2}-\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left[K_\nu\left(\frac{au}{2}\right)\right]^2,\ \operatorname{Re}u>0$

11.147	$\begin{cases} t^{\frac{1}{2}-\nu}(a^2-t^2)^{\mu} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\mu>-1,\ \operatorname{Re}\nu<1$	$2^{-\nu-2}a^{2\mu+2}u^{\nu+\frac{1}{2}}(\mu+1)^{-1}\Gamma(-\nu)\,{}_1F_2\left(1;\nu+1,\mu+2;\frac{a^2u^2}{4}\right)+$ $+\pi 2^{\mu-1}a^{\mu-\nu+1}u^{-\mu-\frac{1}{2}}\operatorname{cosec}(\pi\nu)\,\Gamma(\mu+1)\,I_{\mu-\nu+1}(au)$
11.148	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ t^{\frac{1}{2}-\nu}(t^2-a^2)^{\mu} & \text{pour } t>a,\ \operatorname{Re}\mu>-1 \end{cases}$	$2^{\mu}a^{\mu-\nu+1}u^{-\mu-\frac{1}{2}}\Gamma(\mu+1)\,K_{\mu-\nu+1}(au),\ \operatorname{Re}u>0$
11.149	$t^{-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\{(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+t\}^{-2\mu},$ $\operatorname{Re}a>0,\ \nu=0$	$-\frac{\pi}{4}a^{-2\mu}a^{\frac{1}{2}}\left\{J_{\mu}\left(\frac{au}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\mu}Y_{\mu}\left(\frac{au}{2}\right)-Y_{\mu}\left(\frac{au}{2}\right)\times\right.$ $\left.\times\frac{\partial}{\partial\mu}J_{\mu}\left(\frac{au}{2}\right)\right\},\ \operatorname{Re}u>0$
11.150	$t^{-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\{(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+t\}^{-2\mu},$ $\operatorname{Re}a>0$	$\frac{\pi^2}{4}a^{-2\mu}u^{\frac{1}{2}}\operatorname{cosec}(\pi\nu)\left\{J_{\mu+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)Y_{\mu-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)-\right.$ $\left.-Y_{\mu+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)J_{\mu-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right\},\ \operatorname{Re}u>0$
11.151	$t^{-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+\right.$ $+t]^{2\mu}\cos\left[\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi\right]+[(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-$ $\left.-t]^{2\mu}\cos\left[\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right)\pi\right]\right\},\ \operatorname{Re}a>0$	$\frac{\pi^2}{4}a^{2\mu}u^{\frac{1}{2}}\left\{J_{\frac{\nu}{2}+\mu}\left(\frac{au}{2}\right)J_{\frac{\nu}{2}-\mu}\left(\frac{au}{2}\right)+\right.$ $\left.+Y_{\frac{\nu}{2}+\mu}\left(\frac{au}{2}\right)Y_{\frac{\nu}{2}-\mu}\left(\frac{au}{2}\right)\right\},\ \operatorname{Re}u>0$

Suite

n°	$f(t)$	$F_\nu(u) = \int_0^\infty f(t)(ut)^{\frac{1}{2}} K_\nu(ut)\,dt$
11.152	$t^{-\frac{1}{2}-\mu}(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}[(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+a]^{2\mu}$, $\operatorname{Re} a > 0$, $2\operatorname{Re}\mu + \lvert\operatorname{Re}\nu\rvert < 1$	$\frac{1}{2a} u^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\mu\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}-\mu\right) \times$ $\times W_{\mu,\frac{\nu}{2}}(iau) W_{\mu,\frac{\nu}{2}}(-iau)$, $\operatorname{Re} u > 0$
11.153	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < a, \\ t^{-\frac{1}{2}}(t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\{[t+(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{2\mu} + \\ +[t-(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{2\mu}\} & \text{pour } t > a \end{cases}$	$a^{2\mu} u^{\frac{1}{2}} K_{\frac{\nu}{2}+\mu}\left(\frac{au}{2}\right) K_{\frac{\nu}{2}-\mu}\left(\frac{au}{2}\right)$, $\operatorname{Re} u > 0$
11.154	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < a, \\ t^{-\frac{1}{2}-2\mu}(t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \{[a+i(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{2\mu} + \\ +[a-i(t^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{2\mu}\} & \text{pour } t > a \end{cases}$	$\frac{\pi}{a} u^{-\frac{1}{2}} W_{\mu,\frac{\nu}{2}}(au) W_{-\mu,\frac{\nu}{2}}(au)$, $\operatorname{Re} u > 0$
11.155	$t^{-\frac{1}{2}} e^{-at}$, $\nu = 0$	$u^{\frac{1}{2}}(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} \arccos\left(\frac{a}{u}\right)$, $\operatorname{Re}(a+u) > 0$; $u(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} \arccos\left(\frac{a}{u}\right) \to \frac{\pi}{2}$ pour $u \to \infty$

11.156	$t^{\mu-1}e^{-at}$, $\operatorname{Re}\mu > \lvert\operatorname{Re}\nu\rvert - \frac{1}{2}$	$\dfrac{\pi^{\frac{1}{2}}2^{\nu}u^{\nu+\frac{1}{2}}}{(a+u)^{\mu+\nu+\frac{1}{2}}}\dfrac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)}\times$ $\times\,{}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{1}{2},\ \nu+\frac{1}{2};\mu+1;\ \frac{a-u}{a+u}\right)$, $\operatorname{Re}(a+u)>0$
11.157	$t^{-\frac{1}{2}}\exp(-at^2)$, $\operatorname{Re}a>0$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{1}{4}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\left(\frac{\pi u}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{u^2}{8a}\right)K_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{8a}\right)$
11.158	$t^{-\frac{1}{2}-2\mu}\exp(-at^2)$, $\operatorname{Re}a<0$, $2\operatorname{Re}\mu<1-\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert$	$\frac{1}{2}a^{\mu}u^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\mu\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}-\mu\right)\times$ $\times\exp\left(\frac{u^2}{8a}\right)W_{\mu,\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)$
11.159	$t^{-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\exp[-b(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}b>0$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{u^{\frac{1}{2}}}{2}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)K_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}\left[b+(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}\times$ $\times K_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{a}{2}[b-(b^2-u^2)^{\frac{1}{2}}]\right\}$, $\operatorname{Re}(u+b)>0$
11.160	$\frac{1}{t}\cos(at^{\frac{1}{2}})$, $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}\sec(\pi\nu)\left\{D_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2u}}\right)D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{a}{\sqrt{2u}}\right)+\right.$ $\left.+D_{\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{a}{\sqrt{2u}}\right)D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2u}}\right)\right\}$

Suite

nº	$f(t)$	$F_\nu(u)=\int_0^\infty f(t)(ut)^{\frac{1}{2}}K_\nu(ut)\,dt$
11.161	$\frac{1}{t}\exp\left(-at^{\frac{1}{2}}\right)\cos\left(at^{\frac{1}{2}}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\nu}{2}\right)$, $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)D_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{u}}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)D_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{u}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$, $\operatorname{Re}u>0$
11.162	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<a,\\ t^{\frac{1}{2}-\nu}\sin\left[b\left(t^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } t>a\end{cases}$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}-\nu}bu^{\frac{1}{2}-\nu}\left(u^2+b^2\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{3}{4}}K_{\nu-\frac{3}{2}}\left[a\left(u^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, $\operatorname{Re}u>\lvert\operatorname{Im}b\rvert$
11.163	$\begin{cases}t^{-\frac{1}{2}}\left(a^2-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cos\left[b\left(a^2-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } 0<t<a,\\ 0 & \text{pour } t>a,\quad -1<\operatorname{Re}\nu<1\end{cases}$	$-\frac{\pi^2}{4}u^{\frac{1}{2}}\operatorname{cosec}(\pi\nu)\left[J_{\frac{\nu}{2}}(x)J_{\frac{\nu}{2}}(y)-J_{-\frac{\nu}{2}}(x)J_{-\frac{\nu}{2}}(y)\right]$, $x=\frac{a}{2}\left[b+\left(b^2-u^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, $y=\frac{a}{2}\left[b-\left(b^2-u^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$
11.164	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0<t<a,\\ t^{\frac{1}{2}-\nu}\left(t^2-a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cos\left[b\left(t^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{pour } t>a\end{cases}$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}-\nu}u^{\frac{1}{2}-\nu}\left(u^2+b^2\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}K_{\nu-\frac{1}{2}}\left[a\left(u^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, $\operatorname{Re}u>\lvert\operatorname{Im}b\rvert$
11.165	$t^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sh}(at)$, $-2<\operatorname{Re}\nu<2$	$\frac{\pi}{2}u^{\frac{1}{2}}\left(u^2-a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\sin\left[\nu\arcsin\left(\frac{a}{u}\right)\right]$, $\operatorname{Re}u>\lvert\operatorname{Re}a$

11.166	$t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{ch}\,(at), \quad -1 < \mathrm{Re}\,\nu < 1$	$\dfrac{\pi u^{\frac{1}{2}} \cos\left[\nu \arcsin\left(\frac{a}{u}\right)\right]}{2\,(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}, \quad \mathrm{Re}\,u > \lvert \mathrm{Re}\,a \rvert$
11.167	$t^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{sh}\,(at), \quad -1 < \mathrm{Re}\,\nu < 1$	$\dfrac{\pi \sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}{2\nu u^{\frac{1}{2}}} \sin\left[\nu \arcsin\left(\frac{a}{u}\right)\right], \quad \mathrm{Re}\,u > \lvert \mathrm{Re}\,a \rvert$
11.168	$\begin{cases} t^{-\frac{1}{2}} (a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{ch}\,[b\,(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{pour } 0 < t < a, \\ 0 & \text{pour } t > a, \end{cases}$ $-1 < \mathrm{Re}\,\nu < 1$	$\dfrac{\pi^2}{4} u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{cosec}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) [I_{-\frac{\nu}{2}}(x)\, I_{-\frac{\nu}{2}}(y) - I_{\frac{\nu}{2}}(x)\, I_{\frac{\nu}{2}}(y)],$ $x = \frac{a}{2}\,[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}} + b], \quad y = \frac{a}{2}\,[(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}} - b]$
11.169	$\begin{cases} t^{\frac{1}{2}} P_n(1-2t^2) & \text{pour } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{pour } t > 1, \end{cases}$ $\nu = 0; \ n = 0, 1, 2, \ldots$	$u^{-\frac{1}{2}} \left[(-1)^{n+1} K_{2n+1}(u) + \frac{i}{2} S_{2n+1}(iu)\right]$
11.170	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < a, \\ t^{-\mu} (t^2-a^2)^{-\frac{\mu}{2}} P^{\mu}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{a}\right) & \text{pour } t > a, \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\mu < 1$	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} a^{1-\mu} u^{\mu} K_{\nu}\left(\frac{au}{2}\right) K_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right), \quad \mathrm{Re}\,u > 0$
11.171	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < a, \\ t^{\frac{1}{2}} (t^2-a^2)^{-\frac{\nu}{2}} P^{\nu}_{\mu}\left(\frac{2t^2}{a^2}-1\right) & \text{pour } t > a, \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu < 1$	$2^{-\nu} a u^{\nu-\frac{1}{2}} K_{\mu+1}(au), \quad \mathrm{Re}\,u > 0$

Suite

n°	$f(t)$	$F_\nu(u) = \int_0^\infty f(t)(ut)^{\frac{1}{2}} K_\nu(ut)\,dt$
11.172	$t^{-\nu-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}} Q^{\frac{1}{2}-\nu}_{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2a^2}{t^2}\right)$, $\mathrm{Re}\, a>0$, $\mathrm{Re}\,\nu<1$	$ie^{-i\pi\nu}\pi^{\frac{3}{2}} 2^{-\nu-3} a^{\frac{1}{2}-\nu} u^{\nu-\frac{1}{2}} [\Gamma(1-\nu)]^2 \left\{\left[J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right]^2+\left[Y_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right]^2\right\}$, $\mathrm{Re}\, u>0$
11.173	$t^{\mu+\nu+\frac{1}{2}} J_\mu(at)$, $\mathrm{Re}\,\mu>\lvert\mathrm{Re}\,\nu\rvert-1$	$2^{\mu+\nu} a^\mu u^{\nu+\frac{1}{2}} \Gamma(\mu+\nu+1)(u^2+a^2)^{-\mu-\nu-1}$, $\mathrm{Re}\, u>\lvert\mathrm{Im}\, a\rvert$
11.174	$t^{-\frac{1}{2}}[J_\mu(at)]^2$, $2\,\mathrm{Re}\,\mu>\lvert\mathrm{Re}\,\nu\rvert-1$	$\frac{1}{2}\Gamma\left(\mu+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)u^{-\frac{1}{2}} \times \left\{P^{-\mu}_{\frac{\nu-1}{2}}\left[\left(1+\frac{4a^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}^2$, $\mathrm{Re}\, u>2\lvert\mathrm{Im}\, a\rvert$
11.175	$t^{\frac{1}{2}}[J_\mu(at)]^2$, $2\,\mathrm{Re}\,\mu>\lvert\mathrm{Re}\,\nu\rvert-2$	$\Gamma\left(\mu+\frac{\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\mu-\frac{\nu}{2}+1\right)u^{-\frac{3}{2}} \times \left(1+\frac{4a}{u^2}\right)^{-\frac{1}{2}} P^{-\mu}_{\frac{\nu}{2}}\left[\left(1+\frac{4a^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] P^{-\mu}_{\frac{\nu}{2}-1}\left[\left(1+\frac{4a^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, $\mathrm{Re}\, u>2\lvert\mathrm{Im}\, a\rvert$
11.176	$t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{\nu}{2}}(at^2)$, $a>0$, $\mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\frac{\pi u^{\frac{1}{2}}}{8a\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}\left[\mathrm{H}_{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)-Y_{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)\right]$, $\mathrm{Re}\, u>0$

11.177	$t^{\frac{1}{2}} Y_{\frac{\nu}{2}}(at^2)$, $a>0$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\dfrac{\pi u^{\frac{1}{2}}}{4a\sin(\pi\nu)}\left[\cos\left(\dfrac{\pi\nu}{2}\right)\mathbf{H}_{-\frac{\nu}{2}}\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi\nu}{2}\right)J_{-\frac{\nu}{2}}\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)-\right.$ $\left.-\mathbf{H}_{\frac{\nu}{2}}\left(\dfrac{u^2}{4a}\right)\right]$, $\operatorname{Re}u>0$
11.178	$t^{\frac{1}{2}} J_{\mu+\frac{\nu}{4}}(at^2)\, J_{\mu-\frac{\nu}{4}}(at^2)$, $a>0$, $4\operatorname{Re}\mu>\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert-2$	$\pi^{-1}u^{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\mu+\dfrac{\nu}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\dfrac{\nu}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\times$ $\times W_{-\mu,\frac{\nu}{4}}\left(\dfrac{u^2}{8a}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)W_{-\mu,\frac{\nu}{4}}\left(\dfrac{u^2}{8a}e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$, $\operatorname{Re}u>0$
11.179	$t^{2\nu-2}J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\dfrac{a}{t}\right)$, $a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-\dfrac{1}{3}$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{u}{a}\right)^{-\nu+\frac{1}{2}}J_{2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}]\,K_{2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}u>0$
11.180	$t^{-2\nu}J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{a}{t}\right)$, $a>0$, $\operatorname{Re}\nu<1$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{u}{a}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}K_{2\nu-1}[(2au)^{\frac{1}{2}}]\,\{\sin(\pi\nu)\,J_{2\nu-1}[(2au)^{\frac{1}{2}}]+$ $+\cos(\pi\nu)\,Y_{2\nu-1}[2au]^{\frac{1}{2}}]\}$, $\operatorname{Re}u>0$
11.181	$t^{2\nu}J_{\frac{1}{2}+\nu}\left(\dfrac{a}{t}\right)$, $a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-1$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{u}{a}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}}J_{1+2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}]\,K_{1+2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}u>0$
11.182	$t^{2\nu-2}Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\dfrac{a}{t}\right)$, $a>0$, $\operatorname{Re}\nu>-\dfrac{1}{3}$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{u}{a}\right)^{\frac{1}{2}-\nu}Y_{2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}]\,K_{2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re}u>0$

Suite

n°	$f(t)$	$F_\nu(u) = \int_0^\infty f(t)(ut)^{\frac{1}{2}} K_\nu(ut)\,dt$
11.183	$t^{-2\nu} Y_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{t}\right)$, $a > 0$, $\mathrm{Re}\,\nu < 1$	$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \sec(\pi\nu)\, K_{2\nu-1}[(2au)^{\frac{1}{2}}]\,\{J_{2\nu-1}[(2au)^{\frac{1}{2}}] - J_{1-2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}]\}$
11.184	$t^{2\nu} Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{t}\right)$, $a > 0$, $\mathrm{Re}\,\nu < -1$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} Y_{2\nu+1}[(2au)^{\frac{1}{2}}]\, K_{2\nu+1}[(2au)^{\frac{1}{2}}]$, $\mathrm{Re}\,u > 0$
11.185	$t^{\frac{1}{2}} K_\nu(at)$, $-1 < \mathrm{Re}\,\nu < 1$	$\frac{\pi a^{-\nu} u^{\frac{1}{2}+\nu}}{2\sin(\pi\nu)} \cdot \frac{a^{2\nu} - u^{2\nu}}{a^2 - u^2}$, $\mathrm{Re}\,(u + a) > 0$
11.186	$t^{2\nu} K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{t}\right)$, $\mathrm{Re}\,a > 0$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} K_{2\nu+1}[(2au)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}]\, K_{2\nu+1}[(2au)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}]$, $\mathrm{Re}\,u > 0$
11.187	$t^{2\nu-2} K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{t}\right)$, $\mathrm{Re}\,a > 0$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{1}{2}-\nu} K_{2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}]\, K_{2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}]$, $\mathrm{Re}\,u > 0$
11.188	$t^{-\frac{1}{2}}\left[K_\mu\left(\frac{a}{t}\right)\right]^2$, $\mathrm{Re}\,a > 0$, $\nu = 0$	$2\pi u^{-\frac{1}{2}} K_{2\mu}(2\sqrt{au}\, e^{i\frac{\pi}{4}})\, K_{2\mu}(2\sqrt{au}\, e^{-i\frac{\pi}{4}})$, $\mathrm{Re}\,u > 0$
11.189	$t^{-\frac{1}{2}}[J_{2\nu}(a\sqrt{t}) + I_{2\nu}(a\sqrt{t})]$, $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{\sqrt{u}} I_\nu\left(\frac{a^2}{4u}\right)$, $\mathrm{Re}\,u > 0$

11.190	$t^{-\frac{1}{2}} K_{2\nu}(a\sqrt{t}), \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$	$\frac{\pi u^{-\frac{1}{2}}}{4\cos(\pi\nu)} \left\{ K_\nu\left(\frac{a^2}{4u}\right) + \frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)} \left[\mathbf{L}_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4u}\right) - \mathbf{L}_\nu\left(\frac{a^2}{4u}\right) \right] \right\},$ $\operatorname{Re} u > 0$
11.191	$t^{\nu+\frac{1}{2}} I_{2\nu}(a\sqrt{t})\, J_{2\nu}(a\sqrt{t}), \ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$\pi^{\frac{1}{2}}\, 2^{-\nu-1} a^{2\nu+1} u^{-2\nu-2} J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{2u}\right), \ \operatorname{Re} u > 0$
11.192	$t^{\nu-\frac{1}{2}} I_{2\nu-1}(a\sqrt{t})\, J_{2\nu-1}(a\sqrt{t}), \ \operatorname{Re}\nu > 0$	$\pi^{\frac{1}{2}}\, 2^{-\nu} a^{2\nu-1} u^{-2\nu} J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{2u}\right), \ \operatorname{Re} u > 0$
11.193	$t^{-\frac{1}{2}} K_\mu(a\sqrt{t}) \left[\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) J_\mu(a\sqrt{t}) + \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) Y_\mu(a\sqrt{t}) \right],$ $-1 < \operatorname{Re}\mu < 1, \ \nu = 0$	$-\frac{\pi^2 u^{-\frac{1}{2}}}{16\cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)} H^{(1)}_{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{a^2}{4u}\right) H^{(2)}_{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{a^2}{4u}\right), \ \operatorname{Re} u > 0$
11.194	$t^{\mu+\nu+\frac{1}{2}} \mathbf{H}_\mu(at), \ \operatorname{Re}\mu > -\frac{3}{2},$ $\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -\frac{3}{2}$	$\pi^{-\frac{1}{2}}\, 2^{\mu+\nu+1} a^{\mu+1} u^{-2\mu-\nu-\frac{5}{2}} \times$ $\times \Gamma\left(\mu+\nu+\frac{3}{2}\right) {}_2F_1\left(\mu+\nu+\frac{3}{2}, 1; \frac{3}{2}; -\frac{a^2}{u^2}\right),$ $\operatorname{Re} u > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$
11.195	$t^{\frac{1}{2}} s_{\mu, \frac{\nu}{2}}(at^2), \ a > 0, \ \operatorname{Re}\mu > \frac{1}{2}\lvert \operatorname{Re}\nu \rvert - 2$	$\frac{u^{\frac{1}{2}}}{4a} \Gamma\left(\mu+\frac{\nu}{2}+1\right) \Gamma\left(\mu-\frac{\nu}{2}+1\right) S_{-\mu-1, \frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right), \ \operatorname{Re} u > 0$
11.196	$D_{\nu-1}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right),$ $\lvert \arg a \rvert < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2u} \exp\left[-a\sqrt{2u}\right], \ \operatorname{Re} u > 0$

Suite

n°	$f(t)$	$F_\nu(u)=\int\limits_0^\infty f(t)(ut)^{\frac{1}{2}} K_\nu(ut)\,dt$
11.197	$t^{2\mu+\nu-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}at^2\right) M_{k,\mu}(at^2)$, $\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(2\mu+\nu)>-1$	$2^{\mu-k-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}-\frac{\mu+\nu+k}{2}} u^{k-\mu-1}\Gamma(2\mu+1)\Gamma(2\mu+\nu+1)\exp\left(\frac{u^2}{8a}\right)\times$ $\times W_{k,m}\left(\frac{u^2}{4a}\right),\ 2k=-3\mu-\nu-k-\frac{1}{2},$ $2m=\mu+\nu-k+\frac{1}{2},\ \operatorname{Re} u>0$
11.198	$t^{-\frac{3}{2}} M_{k,0}(iat^2) M_{k,0}(-iat^2),\ a>0,\ \nu=0$	$\frac{\pi u^{\frac{1}{2}}}{16}\left\{\left[J_k\left(\frac{u^2}{8a}\right)\right]^2+\left[Y_k\left(\frac{u^2}{8a}\right)\right]^2\right\}$
11.199	$t^{\frac{1}{2}} W_{\frac{\nu}{2},\mu}\left(\frac{a}{t}\right) W_{-\frac{\nu}{2},\mu}\left(\frac{a}{t}\right),\ \operatorname{Re} a>0$	$2au^{-\frac{1}{2}} K_{2\mu}\left[(2au)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}\right] K_{2\mu}\left[(2au)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right],\ \operatorname{Re} u>0$

§ 3. Y-transformation de Bessel

3.1. Formules fondamentales

n°	$f(t)$	$F(u,\nu)=\int\limits_0^\infty f(t) Y_\nu(ut)\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.200	$\int\limits_0^\infty F(u)\,\mathbf{H}_\nu(ut)\sqrt{ut}\,du,\ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$F(u)$

11.201	$f(at),\ a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{u}{a},\nu\right)$
11.202	$t^m f(t),\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$u^{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{d}{u\,du}\right)^m [u^{\nu-\frac{1}{2}+m}F(u,\ \nu+m)]$
11.203	$\frac{2\nu}{t}f(t)$	$uF(u,\ \nu-1)+uF(u,\ \nu+1)$
11.204	$2\nu f'(t)$	$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)uF(u,\ \nu+1)-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)uF(u,\ \nu-1)$
11.205	$t^{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m [t^{\nu+m-\frac{1}{2}}\times$ $\times f(t)],\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$u^m F(u,\ \nu+m)$
11.206	$t^{\frac{1}{2}+\nu}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m [t^{m-\nu-\frac{1}{2}}\times$ $\times f(t)],\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$(-u)^m F(u,\ \nu-m)$
11.207	$t^{\frac{1}{2}-\nu}\int_0^t \xi^{\nu-\mu+\frac{1}{2}}(t^2-\xi^2)^{\mu-1}f(\xi)\,d\xi,$ $\operatorname{Re}\nu+\frac{3}{2}>\operatorname{Re}\mu>0$	$2^{\mu-1}\Gamma(\mu)\,u^{-\mu}F(u,\ \nu-\mu)$
11.208	$t^{-\mu}f(t),\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}$	$2^{1-\mu}[\Gamma(\mu)]^{-1}u^{\nu+\frac{1}{2}}\int_u^\infty \xi^{\frac{1}{2}-\mu-\nu}(\xi^2-u^2)^{\mu-1}F(\xi,\ \nu+\mu)\,d\xi$

3.2. Fonctions diverses

11.209	$t^{\mu},\ \lvert\operatorname{Re}\nu\rvert-\frac{3}{2}<\mu<0$	$2^{\mu+\frac{1}{2}}\operatorname{cotg}\left[\left(\nu+\frac{1}{2}-\mu\right)\frac{\pi}{2}\right]u^{-\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}\right)}$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u,\nu)=\int_0^\infty f(t)\,Y_\nu(ut)\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.210	$t^{\nu-\frac{1}{2}}(t+a)^{-1},\ \lvert\arg a\rvert<\pi,$ $-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{3}{2}$	$-\dfrac{2^{\nu+1}a^{\nu}u^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+1)}{\pi}S_{-\nu-1,\nu}(au)$
11.211	$t^{\nu-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-1},\ \mathrm{Re}\,a>0,$ $-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{5}{2}$	$-a^{\nu-1}u^{\frac{1}{2}}K_\nu(au)$
11.212	$t^{\nu+\frac{3}{2}}(t^2+a^2)^{-1},\ \mathrm{Re}\,a>0,$ $-\frac{3}{2}<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{1}{2}$	$a^{\nu+1}u^{\frac{1}{2}}K_\nu(au)$
11.213	$\begin{cases} t^{\nu+\frac{1}{2}}(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}a^{\nu+\frac{1}{2}}\,\mathrm{cosec}\,(\pi\nu)\left[\cos(\pi\nu)\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(au)-\mathbf{H}_{-\nu-\frac{1}{2}}(u)\right]$
11.214	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<t<a, \\ t^{\nu+\frac{1}{2}}(t^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{pour } t>a, \end{cases}$ $\mathrm{Re}\,\nu<\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}a^{\nu+\frac{1}{2}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(au)$

11.215	$t^{-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\{[(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+t]^{\mu}+[(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-t]^{\mu}\}$, $\nu=0$, $-\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\mu<\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{\pi}a^{\mu}u^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\left[K_{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right]^2$
11.216	$t^{-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}[(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-a]^{2k}$, $\operatorname{Re}a>0$, $\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert<\frac{1}{2}+\operatorname{Re}k$	$-\frac{1}{a}u^{-\frac{1}{2}}W_{-k,\frac{\nu}{2}}(au)\times$ $\times\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}+k\right)}{\Gamma(\nu+1)}\operatorname{tg}\left[\left(\frac{\nu}{2}-k\right)\pi\right]M_{k,\frac{\nu}{2}}(au)+\right.$ $\left.+\sec\left[\left(\frac{\nu}{2}-k\right)\pi\right]W_{k,\frac{\nu}{2}}(au)\right\}$
11.217	$t^{\mu-\frac{3}{2}}e^{-at}$, $a>0$, $\operatorname{Re}\mu>\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert$	$-\frac{2}{\pi}\Gamma(\mu+\nu)u^{\frac{1}{2}}(u^2+a^2)^{-\frac{\mu}{2}}Q_{\mu-1}^{-\nu}[a(u^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}]$
11.218	$t^{\mu-\frac{1}{2}}e^{-at^2}$, $\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}\mu>\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert-1$	$-a^{-\frac{\mu}{2}}u^{-\frac{1}{2}}\sec\left[\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\pi\right]\exp\left(-\frac{u^2}{8a}\right)\times$ $\times\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)}\sin\left[\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)\right]\times\right.$ $\left.\times M_{\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)+W_{\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)\right\}$
11.219	$t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{a}{t}}$, $\operatorname{Re}a>0$	$2u^{\frac{1}{2}}Y_{\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}]K_{\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}]$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u,\nu)=\int_0^\infty f(t)\,Y_\nu(ut)\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.220	$t^{-\frac{1}{2}}(t^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}\exp[-a(t^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}]$, $\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$-u^{\frac{1}{2}}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)K_{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{b}{2}[(u^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+a]\right\}\left\{\pi^{-1}K_{\frac{\nu}{2}}\times\right.$ $\left.\times\left[\frac{b[(u^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-a]}{2}\right]+\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)I_{\frac{\nu}{2}}\left[\frac{b[(u^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-a]}{2}\right]\right\}$
11.221	$t^{-\frac{1}{2}}\sin at^2,\ a>0,\ -3<\operatorname{Re}\nu<3$	$-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi u}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{u^2}{8a}-\frac{3\nu+1}{4}\pi\right)J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{8a}\right)-\right.$ $\left.-\sin\left(\frac{u^2}{8a}+\frac{\nu-1}{4}\pi\right)Y_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{8a}\right)\right]$
11.222	$t^{-\frac{1}{2}}\cos at^2,\ a>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\frac{1}{4}\left(\frac{\pi u}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{u^2}{8a}-\frac{3\nu+1}{4}\pi\right)J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{8a}\right)+\right.$ $\left.+\cos\left(\frac{u^2}{8a}+\frac{\nu-1}{4}\pi\right)Y_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{8a}\right)\right]$
11.223	$\begin{cases} t^{\frac{1}{2}}P_n(1-2t^2) & \text{pour } 0<t<1,\\ 0 & \text{pour } t>1,\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots\ \nu=0$	$\frac{1}{\pi\sqrt{u}}[S_{2n+1}(u)+\pi Y_{n+1}(u)]$

11.224	$t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{\nu}{2}}(at^2),\ a>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1$	$\frac{\sqrt{u}}{4a}\left[Y_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)+\right.$ $\left.+\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\mathbf{H}_{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)\right]$
11.225	$J_{2\nu-1}(a\sqrt{t}),\ a>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$	$-\frac{a}{2u^{\frac{3}{2}}}\mathbf{H}_{\nu-1}\left(\frac{a^2}{4u}\right)$
11.226	$t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{\nu}{4}}(at^2)\, J_{-\frac{\nu}{4}}(at^2),$ $a>0,\ -2<\mathrm{Re}\,\nu<2$	$\frac{u^{\frac{1}{2}}\sec\left(\frac{\pi\nu}{4}\right)}{16a}\left\{\left[1+2\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\right]\left[J_{\frac{\nu}{4}}\times\right.\right.$ $\left.\left(\frac{u^2}{16a}\right)\right]^2+2\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)J_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{u^2}{16a}\right)Y_{\frac{\nu}{4}}\times$ $\left.\times\left(\frac{u^2}{16a}\right)-\left[Y_{\frac{\nu}{4}}\left(\frac{u^2}{16a}\right)\right]^2\right\}$
11.227	$t^{-\frac{1}{2}} J_\nu\left(\frac{a^2}{t}\right),\ a>0,-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{3}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{u}}\left[Y_{2\nu}(2a\sqrt{u})+\frac{2}{\pi}K_{2\nu}(2a\sqrt{u})\right]$
11.228	$t^{-\frac{1}{2}} Y_\nu\left(\frac{a^2}{t}\right),\ a>0,\ -\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,\nu<\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{u}}J_{2\nu}(2a\sqrt{u})$
11.229	$t^{\frac{1}{2}} K_{\frac{\nu}{2}}(at^2),\ \mathrm{Re}\,a>0,\ -1<\mathrm{Re}\,\nu<1$	$\frac{\pi\sqrt{u}}{4a}\left[\mathrm{cosec}(\pi\nu)\,\mathbf{L}_{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)-\mathrm{cotg}(\pi\nu)\,\mathbf{L}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)-\right.$ $\left.-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)I_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)-\frac{1}{\pi}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)K_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{4a}\right)\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u, \nu) = \int_0^\infty f(t)\, Y_\nu(ut) \sqrt{ut}\, dt,\ u > 0$
11.230	$t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{at^2}{2}\right) K_0\left(\frac{at^2}{2}\right),\ \nu = 0$	$-\frac{\pi \sqrt{u}}{2\sqrt{a}} \exp\left(\frac{u^2}{8a}\right) K_0\left(\frac{u^2}{8a}\right)$
11.231	$t^{-\frac{1}{2}-2\mu} \exp\left(\frac{at^2}{2}\right) K_\mu\left(\frac{at^2}{2}\right)$, $\nu = 0,\ -\frac{3}{4} < \operatorname{Re} \mu < \frac{1}{4}$	$-\frac{a^\mu \pi^{\frac{1}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} - 2\mu\right)\right]^2}{\sqrt{u}\, \Gamma(1-2\mu)} \exp\left(\frac{u^2}{8a}\right) W_{2\mu,\, 0}\left(\frac{u^2}{4a}\right)$
11.232	$t^{-2\nu} K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{t}\right),\ \operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} \nu > \frac{1}{6}$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}-\nu} u^{\nu-\frac{1}{2}} Y_{2\nu-1}[(2au)^{\frac{1}{2}}] K_{2\nu-1}[(2au)^{\frac{1}{2}}]$
11.233	$t^{-2\nu-2} K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{t}\right),\ \operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}-\nu} u^{\frac{1}{2}+\nu} Y_{2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}] K_{2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}]$
11.234	$t^{2\nu-2} K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{t}\right),\ \operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{cosec}(\pi\nu)\, a^{\nu-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}-\nu} K_{2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}] \left\{ J_{2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}] - \right.$ $\left. - J_{-2\nu}[(2au)^{\frac{1}{2}}] \right\}$

11.235	$t^{-\frac{1}{2}}\left[K_\mu\left(\frac{a^2}{t}\right)\right]^2, \ \lvert\arg a\rvert<\frac{\pi}{4};$ $-\frac{1}{4}<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{4}, \ \nu=0$	$\frac{2\pi}{\sqrt{u}}\left[\cos(\pi\mu)J_{2\mu}(2a\sqrt{u})-\sin(\pi\mu)Y_{2\mu}(2a\sqrt{u})\right]$
11.236	$t^{-\frac{1}{2}}K_{2\nu}(a\sqrt{t}), \ \operatorname{Re}a>0,$ $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{4\sqrt{u}}\left[\sec(\pi\nu)J_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4u}\right)-\operatorname{cosec}(\pi\nu)\mathbf{H}_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4u}\right)+\right.$ $\left.+2\operatorname{cosec}(2\pi\nu)\mathbf{H}_\nu\left(\frac{a^2}{4u}\right)\right]$
11.237	$t^{\nu-\frac{1}{2}}J_{2\nu-1}(a\sqrt{t})K_{2\nu-1}(a\sqrt{t}),$ $\lvert\arg a\rvert<\frac{\pi}{4}, \ \operatorname{Re}\nu>0$	$2^{-\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}a^{2\nu-1}u^{-2\nu}\operatorname{cosec}(\pi\nu)\left[\mathbf{L}_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{a^2}{2u}\right)-I_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{2u}\right)\right]$
11.238	$t^{\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{a^2t^2}{4}\right)D_{\frac{\nu-1}{2}}(at),$ $\lvert\arg a\rvert<\frac{3\pi}{4}, \ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{\pi}2^{\frac{3\nu+3}{4}}\frac{1}{a^\nu\sqrt{u}}\Gamma(\nu+1)\exp\left(\frac{u^2}{4a^2}\right)W_{-\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{u^2}{2a^2}\right)$
11.239	$D_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right),$ $\lvert\arg a\rvert<\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{u}\exp(-a\sqrt{u})\sin\left[a\sqrt{u}-\frac{\pi}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\right]$
11.240	$t^{\nu+\frac{3}{2}}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\nu;\frac{3}{2};-a^2t^2\right),$ $\operatorname{Re}a>0, \ -\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}$	$\frac{2^\nu}{\pi^{\frac{1}{2}}a^2\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)u^{\nu+\frac{1}{2}}}K_\nu\left(\frac{u}{2a}\right)K_{\nu+1}\left(\frac{u}{2a}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u,\nu) = \int_0^\infty f(t)\, Y_\nu(ut) \sqrt{ut}\, dt,\ u > 0$
11.241	$t^{\nu+\frac{3}{2}} {}_2F_1\left(1, 2\nu+\frac{3}{2};\ \nu+2;\ -a^2t^2\right)$, $\mathrm{Re}\, a > 0,\ -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, \nu < \frac{1}{2}$	$\dfrac{\Gamma(\nu+2)\, u^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(2\nu+\frac{3}{2}\right) \pi^{\frac{1}{2}} 2^\nu a^{2\nu+3}} \left[K_\nu\left(\frac{u}{2a}\right)\right]^2$

§ 4. H-transformation de Bessel

4.1. Formules fondamentales

n°	$f(t)$	$F(u,\nu) = \int_0^\infty f(t)\, \mathbf{H}_\nu(ut) \sqrt{ut}\, dt,\ u > 0$
11.242	$\int_0^\infty F(u,\nu)\, Y_\nu(tu) \sqrt{tu}\, du$, $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, \nu < \frac{1}{2}$	$F(u,\nu)$
11.243	$f(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}, \nu\right)$

11.244	$t^m f(t);\ m=0, 1, 2, \ldots$	$u^{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{d}{u\,du}\right)^m [u^{\nu-\frac{1}{2}+m} F(u, \nu+m)]$
11.245	$t^{\frac{1}{2}+\nu}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m [t^{m-\nu-\frac{1}{2}} f(t)]$, $m=0, 1, 2, \ldots$	$(-u)^m F(u; \nu-m)$
11.246	$t^{\nu+\frac{1}{2}}\int_t^\infty \xi^{\frac{1}{2}-\nu-\mu}(\xi^2-t^2)^{\mu-1} f(\xi)\,d\xi$, $\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}$	$2^{\mu-1}\Gamma(\mu)\,u^{-\mu} F(u, \nu+\mu)$
11.247	$t^{-\mu} f(t),\ \operatorname{Re}\nu+\frac{3}{2}>\operatorname{Re}\mu>0$	$2^{1-\mu}[\Gamma(\mu)]^{-1} u^{\frac{1}{2}-\nu}\int_0^u \xi^{\frac{1}{2}-\mu+\nu}(u^2-\xi^2)^{\mu-1} F(\xi; \nu-\mu)\,d\xi$

4.2. Fonctions diverses

11.248	$\begin{cases} t^{\nu+\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<t<a, \\ 0 & \text{pour } t>a,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2} \end{cases}$	$a^{\nu+1} u^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}_{\nu+1}(au)$
11.249	$t^{-\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{-1},\ \operatorname{Re}a>0,\ \nu=1$	$\frac{\pi u^{\frac{1}{2}}}{2a}[I_1(au)-\mathbf{L}_1(au)]$
11.250	$(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}[t+(t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+1}$, $\operatorname{Re}a>0,\ -2<\operatorname{Re}\nu<0$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}} a^{\nu+\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}\sin(\pi\nu)}\left[\operatorname{sh}\left(\frac{au}{2}\right) I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)-\operatorname{ch}\left(\frac{au}{2}\right) I_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right]$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u,\nu)=\int_0^\infty f(t)\,\mathbf{H}_\nu(ut)\sqrt{ut}\,dt,\ u>0$
11.251	$t^{\lambda-\frac{1}{2}}e^{-at}$, $\operatorname{Re} a>0$, $\operatorname{Re}(\lambda+\nu)>-2$	$\dfrac{u^{\nu+\frac{3}{2}}\,\Gamma(\lambda+\nu+2)}{2^{\nu}a^{\lambda+\nu+2}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\ {}_3F_2\left(1,\ \dfrac{\lambda+\nu}{2}+1,\ \dfrac{\lambda+\nu+3}{2};\ \dfrac{3}{2},\ \nu+\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{u^2}{a^2}\right)$
11.252	$t^{\lambda+\frac{1}{2}}\exp(-at^2)$, $\operatorname{Re} a>0$, $\operatorname{Re}(\lambda+\nu)>-3$	$2^{-\nu-1}\pi^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{\lambda+\nu+3}{2}}u^{\nu+\frac{3}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\lambda+\nu+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\times$ $\times\,{}_2F_2\left(1,\ \dfrac{\lambda+\nu+3}{2};\ \dfrac{3}{2},\ \nu+\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{u^2}{4a}\right)$
11.253	$J_{\nu+\frac{1}{2}}(at)$, $a>0, -\dfrac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<1$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<u<a, \\ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{a}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{pour } u>a \end{cases}$
11.254	$t^{-\frac{1}{2}}Y_{\nu+1}(at)$, $a>0$, $-\dfrac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<\dfrac{3}{2}$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0<u<a, \\ -a^{-\nu-1}u^{\frac{1}{2}+\nu} & \text{pour } u>a \end{cases}$

11.255	$t^{\nu+\frac{1}{2}} J_\nu(at)\, Y_\nu(at),\ a>0,$ $-\frac{3}{4}<\operatorname{Re}\nu<0$	$\dfrac{\Gamma\left(2\nu+\frac{3}{2}\right) u^{\nu+\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}\, 2^{\nu+2} a^{2\nu+3}\, \Gamma(\nu+2)}\, {}_2F_1\left(1,\ 2\nu+\frac{3}{2};\ \nu+2;\ \frac{u^2}{4a^2}\right)$ $(0<u<2a)$
11.256	$J_{2\nu+1}(a\sqrt{t}),\ a>0,\ -\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{4}$	$-\dfrac{a}{2u^{\frac{3}{2}}}\, Y_{\nu+1}\left(\frac{a^2}{4u}\right)$
11.257	$t^{-\frac{1}{2}} J_{2\nu}(a\sqrt{t}),\ a>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{5}{4}$	$-u^{-\frac{1}{2}}\, Y_\nu\left(\frac{a^2}{4u}\right)$
11.258	$t^{\frac{1}{2}} K_\nu(at),\ \operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}$	$\dfrac{a^{-\nu-1} u^{\nu+\frac{3}{2}}}{u^2+a^2}$
11.259	$t^{\mu+\nu+\frac{1}{2}} K_\mu(at),\ \operatorname{Re} a>0,$ $\operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}(\mu+\nu)>-\frac{3}{2}$	$2^{\mu+\nu+1}\pi^{-\frac{1}{2}} a^{-\mu-2\nu-3} u^{\nu+\frac{3}{2}}\times$ $\times\,\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{3}{2}\right) {}_2F_1\left(1,\ \mu+\nu+\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ -\frac{u^2}{a^2}\right)$
11.260	$t^{\nu+\frac{1}{2}} [K_\nu(at)]^2,\ \operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{4}$	$\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\nu-3} a^{-2\nu-3} u^{\nu+\frac{3}{2}}\, \Gamma\left(2\nu+\frac{3}{2}\right) [\Gamma(\nu+2)]^{-1}\, {}_2F_1\times$ $\times\left(1,\ 2\nu+\frac{3}{2};\ \nu+2;\ -\frac{u^2}{4a^2}\right)$
11.261	$t^{-\nu-\frac{1}{2}} K_\nu(at)\, K_{\nu+1}(at),\ \operatorname{Re} a>0,$ $\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$	$\dfrac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\nu-2}}{a^2}\, u^{\nu+\frac{3}{2}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\nu;\ \frac{3}{2};\ -\frac{u^2}{4a^2}\right)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u, \nu) = \int_0^\infty f(t)\, \mathbf{H}_\nu(ut) \sqrt{ut}\, dt,\ u > 0$
11.262	$K_{2\nu-1}(2a\sqrt{t})$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\frac{2^{\nu+1} a}{\pi u^{\frac{3}{2}}} \Gamma(\nu+1) S_{-\nu-2,\, \nu-1}\left(\frac{a^2}{u}\right)$
11.263	$t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{\pi} K_{2\nu}(2a\sqrt{t}) + Y_{2\nu}(2a\sqrt{t})\right]$, $a > 0$, $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$	$u^{-\frac{1}{2}} J_\nu\left(\frac{a^2}{u}\right)$
11.264	$t^{\frac{1}{2}} Y_\nu(a\sqrt{t}) K_\nu(a\sqrt{t})$, $\lvert\arg a\rvert < \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2u^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{a^2}{2u}\right)$
11.265	$t^{\nu-\frac{1}{2}} Y_{2\nu-1}(a\sqrt{t}) K_{2\nu-1}(a\sqrt{t})$, $\lvert\arg a\rvert < \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{4}$	$\frac{a^{2\nu-1}}{\pi^{\frac{1}{2}} 2^\nu u^{2\nu}} K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{2u}\right)$
11.266	$t^{\nu+\frac{1}{2}} Y_{2\nu}(a\sqrt{t}) K_{2\nu}(a\sqrt{t})$, $\lvert\arg a\rvert < \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{4}$	$\frac{a^{2\nu+1}}{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\nu+1} u^{2\nu+2}} K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{2u}\right)$
11.267	$t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}_\nu\left(\frac{a^2}{t}\right)$, $a > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}$	$-u^{-\frac{1}{2}} J_{2\nu}(2a\sqrt{u})$

11.268	$t^{-\frac{3}{2}} \mathbf{H}_{\nu-1}\left(\frac{a^2}{t}\right)$, $a>0$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{a} J_{2\nu-1}(2a\sqrt{u})$
11.269	$t^{-\frac{1}{2}}\left[J_{-\nu}\left(\frac{a^2}{t}\right)+\sin(\pi\nu)\,\mathbf{H}_{\nu}\left(\frac{a^2}{t}\right)\right]$, $a>0$, $-\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<0$	$u^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{\pi}K_{2\nu}(2a\sqrt{u})-Y_{2\nu}(2a\sqrt{u})\right]$
11.270	$t^{-\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{4}t^2\right)[D_\mu(t)-D_\mu(-t)]$, $\operatorname{Re}(\mu+\nu)>-\frac{3}{2}$, $\operatorname{Re}\mu>-1$	$\frac{2^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\nu+1\right)} u^{\mu+\nu+\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\times$ $\times\, {}_1F_1\left(\frac{\mu+1}{2};\ \frac{\mu}{2}+\nu+1;\ -\frac{u^2}{2}\right)$
11.271	$t^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)W_{-\frac{\nu+1}{2},\ \frac{\nu}{2}}(t^2)$. $\operatorname{Re}\nu>-1$	$2^{-\nu-1}u^{\nu+\frac{1}{2}}\pi\exp\left(\frac{u^2}{4}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2}\right)$

§ 5. Transformation de Kontorovich-Lébédev

nº	$f(t)$	$F(u)=\int_0^\infty f(t)\,K_{it}(u)\,dt,\ u>0$
11.272	$t\sin(at)$, $\lvert\operatorname{Im}a\rvert<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi u}{2}\operatorname{sh}a\exp(-u\operatorname{ch}a)$
11.273	$\cos(at)$, $\lvert\operatorname{Im}a\rvert<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}\exp(-u\operatorname{ch}a)$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u)=\int_0^\infty f(t)\,K_{it}(u)\,dt,\ u>0$
11.274	$t\,\mathrm{th}(\pi t)\,P_{-\frac{1}{2}+it}(a)$	$\left(\frac{\pi u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-au}$
11.275	$t\,\mathrm{th}(\pi t)\,K_{it}(b),\ \lvert\arg b\rvert<\pi$	$\frac{\frac{\pi}{2}(bu)^{\frac{1}{2}}}{b+u}\exp(-b-u)$
11.276	$t\,\mathrm{sh}(\pi t)\,K_{2it}(a),\ \lvert\arg a\rvert<\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}a}{2^{\frac{5}{2}}u^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-u-\frac{a^2}{8u}\right)$
11.277	$t\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)K_{\frac{it}{2}}(a),\ \lvert\arg a\rvert<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}u}{2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-a-\frac{u^2}{8a}\right)$
11.278	$\mathrm{ch}(at)\,K_{it}(b),\ \lvert\mathrm{Re}\,a\rvert+\lvert\arg b\rvert<\pi$	$\frac{\pi}{2}K_0\left[(u^2+b^2+2bu\cos a)^{\frac{1}{2}}\right]$
11.279	$t(t^2+n^2)^{-1}\,\mathrm{sh}(\pi t)\,K_{it}(a),\ a>0,$ $n=0,1,2,\ldots$	$\begin{cases}\frac{\pi^2}{2}I_n(u)\,K_n(a) & \text{pour } 0<u<a,\\ \frac{\pi^2}{2}I_n(a)\,K_n(u) & \text{pour } u>a\end{cases}$

11.280	$t \operatorname{sh}(\pi t) K_{it}(a) K_{it}(b)$, $\lvert \arg a \rvert + \lvert \arg b \rvert < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi^2}{4} \exp\left[-\frac{u}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{ab}{u^2}\right)\right]$
11.281	$t \operatorname{sh}\left(\frac{\pi t}{2}\right) K_{\frac{it}{2}}(a) K_{\frac{it}{2}}(b)$, $\lvert \arg a \rvert + \lvert \arg b \rvert < \pi$	$\frac{\pi^2 u}{2v} \exp\left[-\frac{(a+b)v}{2(ab)^{\frac{1}{2}}}\right]$, $v = (u^2+4ab)^{\frac{1}{2}}$
11.282	$t \operatorname{sh}(\pi t) K_{\frac{it}{2}+\lambda}(a) K_{\frac{it}{2}-\lambda}(a)$, $a > 0$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < u < 2a, \\ \frac{\pi^2 u}{2^{2\lambda+1} a^{2\lambda} v} [(u+v)^{2\lambda} + (u-v)^{2\lambda}] & \text{pour } u > 2a, \\ & v = (u^2 - 4a^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$
11.283	$t \operatorname{sh}(\pi t) \Gamma(\lambda+it) \Gamma(\lambda-it) K_{it}(a)$, $\lvert \arg a \rvert < \pi$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$	$\frac{2^{\nu-1} \pi^{\frac{3}{2}} (au)^{\lambda}}{(u+a)^{\lambda}} \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) K_{\nu}(u+a)$
11.284	$t \operatorname{sh}(2\pi t) \Gamma(\lambda+it) \Gamma(\lambda-it) K_{it}(a)$, $a > 0$, $0 < \operatorname{Re}\lambda < \frac{1}{2}$	$\frac{2^{\lambda} \pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)} \left(\frac{au}{\lvert u-a \rvert}\right)^{\lambda} K_{\lambda}(\lvert u-a \rvert)$
11.285	$t \operatorname{sh}(\pi t) \Gamma\left(\lambda+\frac{it}{2}\right) \Gamma\left(\lambda-\frac{it}{2}\right) K_{it}(a)$, $\lvert \arg a \rvert < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$	$2\pi^2 \left(\frac{au}{2v}\right)^{2\lambda} K_{2\lambda}(v)$, $v = (u^2+a^2)^{\frac{1}{2}}$
11.286	$\frac{t \operatorname{th}(\pi t) K_{it}(a)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{it}{2}\right)}$, $\lvert \arg a \rvert < \frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi a u}{u^2+a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp[-(u^2+a^2)^{\frac{1}{2}}]$

Suite

n°	$f(t)$	$F(u)=\int_0^\infty f(t)\,K_{it}(u)\,dt,\ u>0$
11.287	$t\,\mathrm{sh}(\pi t)\,\Gamma(\lambda+it)\,\Gamma(\lambda-it)\times$ $\times P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{-\frac{1}{2}+it}(b)\,K_{it}(a),\ \lvert\arg a\rvert<\frac{\pi}{2},$ $\lvert\arg(b-1)\rvert<\pi,\ \mathrm{Re}\,\lambda>0$	$2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}\left(\frac{au}{v}\right)^{\lambda}(b^2-1)^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}}K_\lambda(v),\ v=(u^2+a^2+2abu)^{\frac{1}{2}}$

§ 6. Transformation de Kontorovitch-Lébédev (suite, voir [134])

n°	$f(t)$	$F(\tau)=\int_0^\infty f(t)\,K_{i\tau}(t)\,dt$
11.288	1	$\dfrac{\pi}{2\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}\tau}$
11.289	t	$\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\tau}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}\tau}$
11.290	$t^\nu,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1$	$2^{\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1+i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1-i\tau}{2}\right)$

11.291	$t^{2n}, n=1, 2, 3, \ldots$	$\frac{\pi}{2} \prod_{s=1}^{n} [(2s-1)^2+\tau^2] \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \tau}$
11.292	$t^{2n-1}, n=2, 3, \ldots$	$\frac{\pi}{2} \frac{\tau}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \tau} \prod_{s=1}^{n-1} [(2s)^2+\tau^2]$
11.293	$e^{-t \cos \alpha}, 0 \leqslant \alpha < \pi$	$\frac{\pi}{\sin \alpha} \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau}{\operatorname{sh} \pi\tau}$
11.294	$e^{-t \operatorname{ch} \alpha}$	$\frac{\pi}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{\sin \alpha\tau}{\operatorname{sh} \pi\tau}$
11.295	e^{-t}	$\frac{\pi\tau}{\operatorname{sh} \pi\tau}$
11.296	$t^{\nu} e^{-t}, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{\nu} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)} \Gamma(1+\nu+i\tau) \Gamma(1+\nu-i\tau)$
11.297	$t^n e^{-t}, n=1, 2, \ldots$	$\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \frac{\pi\tau}{\operatorname{sh} \pi\tau} \prod_{s=1}^{n} (s^2+\tau^2)$
11.298	$\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi\tau}$
11.299	$\frac{e^{-t \operatorname{ch} \alpha}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau} (\operatorname{ch} \alpha)$
11.300	$\frac{e^{-(t+a)}}{(t+a)\sqrt{t}}$	$\frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi\tau} \frac{K_{i\tau}(a)}{\sqrt{a}}$

Suite

nº	$f(t)$	$F(\tau)=\int_0^\infty f(t)\,K_{i\tau}(t)\,dt$
11.301	$\frac{1}{2t}\,e^{-t-\frac{a^2}{2t}}, \quad a>0$	$K^2_{i\tau}(a)$
11.302	$e^{-a^2t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{4a}\,e^{\frac{1}{8a^2}}\,\frac{K_{i\frac{\tau}{2}}\left(\frac{1}{8a^2}\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}\tau}$
11.303	$\cos t$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\frac{\cos\left(\frac{\tau}{2}\,\mathrm{Arch}\,\sqrt{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}\tau}$
11.304	$\sin t$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}\,\mathrm{Arch}\,\sqrt{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}\tau}$
11.305	$\cos\left(t\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\tau}{\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}\tau}$
11.306	$\sin\left(t\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\tau}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}\tau}$

11.307	$\dfrac{\sin\left(t \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\right)}{t}$	$\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1}{\tau \operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\tau}\sin\dfrac{\alpha}{2}\tau$
11.308	$\dfrac{1-\cos\left(t \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\right)}{t}$	$\dfrac{\pi\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\tau\right)}{\tau \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\tau}$
11.309	$\dfrac{1-\cos\left(t \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\right)}{t^2}$	$\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\tau\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\tau \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\tau \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}}{\tau(1+\tau^2)\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\tau}$
11.310	$e^{-t \operatorname{ch}\alpha\cos\beta}\cos(t \operatorname{sh}\alpha\sin\beta)$	$\dfrac{\pi}{\operatorname{sh}\pi\tau}\left\{\dfrac{\operatorname{ch}\beta\tau\sin\alpha\tau\cos\beta\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{sh}^2\alpha\cos^2\beta+\operatorname{ch}^2\alpha\sin^2\beta}+\dfrac{\operatorname{sh}\beta\tau\cos\alpha\tau\sin\beta\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}^2\alpha\cos^2\beta+\operatorname{ch}^2\alpha\sin^2\beta}\right\}$
11.311	$J_0\left(t \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\right)$	$\dfrac{\pi}{2\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\tau}P_{-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$
11.312	$t^m J_m\left(t \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\right)$, $\operatorname{Re} m>-\frac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}}\right)^m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}-\frac{i\tau}{2}\right)P^{-m}_{-\frac{1}{2}+\frac{i\tau}{2}}(\operatorname{ch}\alpha)$
11.313	$K_\nu(t)$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$	$\dfrac{\pi^2}{2}\,\dfrac{1}{\operatorname{ch}\pi\tau+\cos\pi\nu}$
11.314	$1-\Phi(\sqrt{t})=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\sqrt{t}}^{\infty}e^{-x^2}\,dx$	$\dfrac{\pi}{2\operatorname{ch}\pi\tau\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\tau}\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\tau-1\right)$

CHAPITRE XII

AUTRES TRANSFORMATIONS INTÉGRALES

§ 1. Transformation de Mehler-Fock (voir [134])

n°	$f(t)$	$F(\tau)=\int\limits_1^\infty f(t)\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(t)\,dt$
12.1	$t^{-\nu},\ \nu>\frac{1}{2}$	$\frac{2^{\nu-2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)}{\Gamma(\nu)}$
12.2	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)$
12.3	$\frac{1}{t^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)$
12.4	$t^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\tau}$
12.5	$t^{-\frac{5}{2}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\tau}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\tau}$

12.6	$(t+a)^{-\nu},\quad a>-1,\ \nu>\frac{1}{2}$	$(a^2-1)^{\frac{1-\nu}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}-i\tau\right)}{\Gamma(\nu)}P^{1-\nu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(a)$
12.7	$\dfrac{1}{t+a}$	$\dfrac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(a)$
12.8	$\dfrac{1}{(t+a)^n},\ n=1,2,\ldots$	$(-1)^{n-1}\dfrac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau}\dfrac{P^{n-1}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(a)}{(n-1)!\,(a^2-1)^{\frac{n-1}{2}}}$
12.9	$\dfrac{1}{(t+a)^{3/2}}$	$2^{\frac{3}{2}}\dfrac{\sin(\tau\operatorname{Arch}a)}{\sqrt{a^2-1}\operatorname{sh}\pi\tau}$
12.10	$\dfrac{1}{(t-\cos\beta)^{3/2}},\ 0<\beta<2\pi$	$\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{\sin\beta}\dfrac{\operatorname{sh}(\pi-\beta)\tau}{\operatorname{sh}\pi\tau}$
12.11	$\dfrac{1}{(t+a)^{n+\frac{1}{2}}},\ n=1,2,\ldots$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\pi}{\operatorname{sh}\pi\tau}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\dfrac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\dfrac{\sin\tau\operatorname{Arch}a}{\sqrt{a^2-1}}\right)$
12.12	$(t+1)^{-\nu},\ \nu>\frac{1}{2}$	$\dfrac{2^{1-\nu}}{\Gamma^2(\nu)}\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+i\tau\right)$
12.13	$\dfrac{1}{\sqrt{t^2+a^2-1}},\ a>0$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(a)\,\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)$
12.14	$e^{-at},\ a>0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi a}}K_{i\tau}(a)$

Suite

nº	$f(t)$	$F(\tau)=\int_1^{\infty} f(t)\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(t)\,dt$
12.15	$\dfrac{e^{-a\sqrt{2t+2}}}{\sqrt{2t+2}}$, $a>0$	$\dfrac{2}{\pi}K_{i\tau}^{2}(a)$
12.16	$\dfrac{1}{t}\left(1-\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{\operatorname{ch}\pi\tau\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{2}\tau}$
12.17	$\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,\dfrac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau}\,\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{5}{4}+\dfrac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{i\tau}{2}\right)}$
12.18	$-e^{-at}\operatorname{Ei}(-at)$	$\sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}\,\dfrac{1}{\operatorname{ch}\pi\tau}K_{i\tau}(a)$

§ 2. Transformation de Hilbert

nº	$f(t)$	$g(x)=\dfrac{1}{\pi}\,\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{f(t)}{t-x}\,dt$
12.19	$f(t)$	$g(x)$
12.20	$g(t)$	$-f(x)$
12.21	$f(a+t)$, a est un nombre réel	$g(a+x)$

12.22	$f(at),\ a>0$	$g(ax)$
12.23	$f(-at),\ a>0$	$-g(-ax)$
12.24	$tf(t)$	$xg(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$
12.25	$(t+a)f(t)$	$(x+a)g(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$
12.26	$f'(t)$	$g'(x)$
12.27	$\frac{1}{t^2+a^2},\ \mathrm{Re}\,a>0$	$-\frac{x}{a(x^2+a^2)}$
12.28	$\frac{t}{t^2+a^2},\ \mathrm{Re}\,a>0$	$\frac{a}{x^2+a^2}$
12.29	$\lvert t\rvert^{\nu-1},\ 0<\mathrm{Re}\,\nu<1$	$-\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\mathrm{sign}\,x\,\lvert x\rvert^{\nu-1}$
12.30	$\mathrm{sign}\,t\,\lvert t\rvert^{\nu-1},\ 0<\mathrm{Re}\,\nu<1$	$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\lvert x\rvert^{\nu-1}$
12.31	$e^{iat},\ a>0$	ie^{iax}
12.32	$\sin(at),\ a>0$	$\cos(ax)$
12.33	$\frac{\sin(at)}{t},\ a>0$	$\frac{\cos(ax)-1}{x}$
12.34	$\cos(at),\ a>0$	$-\sin(ax)$

Suite

n°	$f(t)$	$g(x) = \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt$
12.35	$\frac{1-\cos(at)}{t}$, $a > 0$	$\frac{\sin(ax)}{x}$
12.36	$\sin(at)\ J_1(at)$, $a > 0$	$\cos(ax)\ J_1(ax)$
12.37	$\cos(at)\ J_1(at)$, $a > 0$	$-\sin(ax)\ J_1(ax)$
12.38	$\sin(at)\ J_n(bt)$, $0 < b < a$; $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\cos(ax)\ J_n(bx)$
12.39	$\cos(at)\ J_n(bt)$, $0 < b < a$; $n = 0, 1, 2, \ldots$	$-\sin(ax)\ J_n'(bx)$
12.40	$e^{-a\|t\|}\ I_0(at)$, $a > 0$	$-\frac{2}{\pi} \text{sh}(ax)\ K_0(a\|x\|)$
12.41	$\text{sh}(at)\ K_0(a\|t\|)$, $a > 0$	$\frac{\pi}{2} e^{-a\|x\|}\ I_0(ax)$
12.42	$\text{ch}(at)\ K_0(a\|t\|)$, $a > 0$	$-\frac{\pi}{2} \text{sign}\ x e^{-a\|x\|}\ I_0(ax)$

BIBLIOGRAPHIE

1. Adamov A., Sur les développements d'une fonction d'une variable réelle en séries suivant des fonctions de type défini, Saint-Pétersbourg, 1907 (en russe).
2. Agranovitch Z. et Povzner A., Application des méthodes opérationnelles à la résolution de quelques problèmes de physique mathématique, izd. KhGU, 1954 (en russe).
3. Ahiezer N., Sur une généralisation de la transformation de Fourier et du théorème de Wiener-Paley, DAN 96 (1954), 889-892 (en russe).
4. Akutowicz E. J., The uniqueness of Laplace integrals, Duke Math. Journ. 23 (1956). 165-174.
5. Alexandrov P., Kolmogorov A., Introduction à la théorie des fonctions de variable réelle, M.-L., GTTI, 1933 (en russe).
6. Arens R. F. and Calderon A. P., Analytic functions of Fourier transforms, Segundo symposium sobre algunos problemas matematicos que se estan estudiando en Latino America, julio 1954, 39-52, Montevideo, Uruguay, 1954.
7. Ascoli G., Transformazione di Laplace, Torino, Gheroni, 1956.
8. Atabékov G. I., Analyse harmonique et méthode opérationnelle, Oboronguiz, 1956 (en russe).
9. Athurs E. and Martin L., Closed expansion of the convolution integral (a generalization of servomechanism error coefficients), Journ. Appl. Phys. 26 (1955), 58-60.
10. Batschelet E., Die Operatorenmethode von L. Fantappie und die Laplace-Transformation, Comment, Math. Helv. 22 (1949), 200-214.
11. Bellert S., On Foundations of Operational Calculus, Bull. Acad. Polon. Sci. 5 (1957), 855-859.
12. Berg L., Asymptotische Auffassung der Operatorenrechnung, Studia Math. 21 (1962), 215-229.
13. Berge C., Sur un nouveau calcul symbolique et ses applications, Journ. Math. Pures Appl. (9) 29 (1950), 245-274.
14. Berkes B., Fouriersche Reihen und Laplacesche Transformation, Hrvatsko Prirodoslovno Drustvo, Glasnik Mat.-Fiz. Astr., ser. 11, 8 (1953), 196-212.
15. Berliand O., Sur quelques évaluations asymptotiques, DAN 124, (1959), 507-508 (en russe).
16. Bhonsle B. R., On some results involving generalized Laplace's transforms, Bull. Calcutta Math. Soc. 48 (1956), 55-63.
17. Bielecki A., Sur le module dans les espaces J.G. Mikusinski, Fund. Math. 36.
18. Blumental L., Note on fractional operators and the theory of composition, Amer, Journ. Math. 53 (1931), 483-492.

19. Bochner S., Darstellung rell-variables und analytischer Funktionen durch verallgemeinerte Fourier- und Laplace-Integrale, Math. Ann. 97, (1927), 635-662.
20. Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akad. Verl. Leipzig, 1932.
21. Bochner S. and Chandrasekaran K. C., Fourier Transforms, Princeton Univ. Press, 1949.
22. Bojanic, Jurkat und Peyerimhoff, Über eiken Taubersatz für Faltungen, Math. Z. 65 (1956), 195-200.
23. Bose S. K., A study of the generalized Laplace integral, Bull. Calcutta Math. Soc. 41 (1949).
24. Bose S. K., On Laplace transform, Math. Z. 56 (1952), 84-93.
25. Bose S. K., Laplace transform and self-reciprocal functions, Ganita 5 (1954), 25-32.
26. Boulgakov V., Oscillations, M.-L., Gostekhizdat, 1948 (en russe).
27. Branges L. L., Local operators on Fourier transforms, Duke Math. Journ. 25 (1958), 143-153.
28. Buschman R. G., A substitution theorem for the Laplace transformation and its generalization to transformations with symmetric kernel, Pacific. Journ. Math. 7 (1957), 1529-1533.
29. Butzer P. L., Halbgruppen von linearen Operatoren und das Darstellungs- und Umkehrproblem für Laplace-Transformationen, Math. Ann. 134 (1957), 154-166.
30. Cambi E., Inverse Laplace transforms experessed as Neumann series, Journ. Math. Phys. 35, (1956), 114-122.
31. Campbell G. and Foster R., Fourier integral for practical applications, New-York, van Nostrand, 1948.
32. Carleman T., L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent, Uppsala, 1944.
33. Carman T., Bio M. Les méthodes mathématiques de l'ingénieur, 1949.
34. Carslaw H. Conduction of heat in solids, Oxford University Press, 1959.
35. Carslaw H., Jaeger J., Operational Methods in Applied Mathematics, Londres, 1943.
36. Carson D. P., Phénomènes électriques et non stationnaires et calcul opérationnel, Kharkov-Kiev, 1934 (en russe).
37. Churchill R. V., Extension of operational mathematics, Univ. Maryland Book Store, College Park, Md. 1956.
38. Churchill R. V., The operational calculus of Legendre transforms, Journ. Math. Physics 33 (1954), 165-178.
39. Colombo S., Les transformations de Mellin et de Hankel, applications à la physique mathématique, Paris, CNRS, 1959, 99.
40. Dalton J., Symbolic operators, 1954.
41. Delange H., Sur les singularités des fonctions définies par des intégrales de Laplace, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 26 (1954-1955), 88-102 (1957).
42. Delavault H., Application de la transformation de Laplace et de la transformation de Hankel à la détermination de solutions de l'équation de la chaleur et des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques, Paris, 1957.
43. Denis-Papin, Cours de calcul opérationnel, Paris, 1950.
44. Ditkine V., Calcul opérationnel, UMN 2, vip. 6 (22), (1947), 72-158 (en russe).
45. Ditkine V., Recherche sur la structure des idéaux dans certains anneaux normés, Oučen. zap. MGU, vip. 30 (1939) (en russe).
46. Ditkine V., Transformation généralisée de Laplace Inj. fiz. journ. 1, n° 11 (1958) (en russe).

47. D i t k i n e V., Sur la théorie du calcul opérationnel, DAN 116 (1957), 15-17 (en russe).
48. D i t k i n e V., Galculs opérationnels pour les fonctions définies sur une droite tout entière, DAN 112 (1957), 191-194 (en russe).
49. D i t k i n e V., Sur la théorie du calcul opérationnel, DAN 123 (1958), 395-396 (en russe).
50. D i t k i n e V., K o u z n e t s o v P., Formulaire de calcul opérationnel M.-L., Gostekhizdat, 1951 (en russe).
51. D i t k i n e V., et P r o u d n i k o v A., Calcul opérationnel sur deux variables et ses applications, M., Fizmatguiz, 1958 (en russe).
52. D i t k i n e V., P r o u d n i k o v A., Sur la théorie du calcul opérationnel appliqué à l'équation de Bessel, J. vičisl. matem. i matem. fiz. 3, n° 2 (1963) (en russe).
53. D o e t s c h G., Problem solved and unsolved in the theory of the Laplace transform, Acad. Ci. Madrid 46 (1952), 125-136.
54. D o e t s c h G. Über den Konvergenzbereich von Laplace-Integralen mit komplexen Integrationsweg, Math. Nachr. 18 (1958), 129-135.
55. D o e t s c h G., Über die Singularitäten der Mellin-Transformierten, Math. Ann. 128 (1954), 171-176.
56. D o e t s c h G., Asymptotic developmente and the Laplace-Transform, Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 13 (1953), 5-60.
57. D o e t s c h G., Handbuch der Laplace-Transformation, bd. I-IV, Birkhäuser Verlag. Basel. 1950-1956.
58. D o e t s c h G., Theorie und Anwendung der Laplace Transformation, Berlin, 1937.
59. D o e t s c h G. Tabellen zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch, Berlin und Göttingen, 1947.
60. D o l e z a l V., Reseni linearnich elektrickych obvodu distribucemi, Slaboproudy obzor 20 (1959), 302-306.
61. D u f r e s n o y J., Sur le produit de composition de deux fonctions, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 225 (1947), 857-859.
62. D u f r e s n o y J., Autour du théorème de Phragmen-Lindelöf. Bull. Sci. Math. 72 (1948), 17-22.
63. E f r o s A., Sur quelques applications du calcul opérationnel à l'analyse, Matem. sb. 42 (1935) (en russe).
64. E f r o s A., D a n i l e v s k i A., Calcul opérationnel et intégrales étendues à un contour, Kharkov, 1937 (en russe).
65. E r d e l y i A., M a g n u s W., O b e r h e t t i n g e r F., T r i c o m i F. G., Tables of integral transforms, vol. 1, 2, New-York, McGraw-Hill, 1954.
66. E r d e l y i A., Bemerkungen zur Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale, Compositio Math 5 (1938), 435-446.
67. E r d e l y i A., On a generalization of the Laplace transformation, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 10 (1954), 53-55.
68. F a n K y, Exposé sur le calcul symbolique de Heaviside, Revue Sci. (Rev. Rose illus) 80 (1942), 147-163.
69. F a z e k a s F. es F r e y T., Operatorszamitas. Specialis függvenyek, Budapest, 1957.
70. F e n y ö I., Eine Bemerkung zur Theorie der Hankelschen Transformation, Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl. 2 (1953).
71. F e n y ö I., A Mikusinski-fele operatorfogalom es a disztribucio fogalma közti kapcsolatrol, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. 8 (1958), 385-392.
72. F e n y ö I., Über die Verallgemeinerung der Operatorenrechnung, Publ. Math. 6 n° 1-2 (1959), 48-59.

73. Fock V., Sur le développement d'une fonction arbitraire en intégrale suivant les fonctions de Legendre à indice complexe, DAN 39 (1943), 279-283 (en russe).
74. Fock V., Sur certaines équations intégrales de la physique mathématique, DAN 36 (1942), 147-151 (en russe).
75. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Paris, 1882.
76. Fox c., A classification of kernels which possess integral transforms, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 401-412.
77. Fuchs B., Chabat B., Les fonctions à variable complexe et certaines de leurs applications, M.-L., Gostekhizdat, 1949 (en russe).
78. Fuchs B., Lévine V., Les fonctions à variable complexe et certaines de leurs applications, M.-L., Gostekhizdat, 1951 (en russe).
79. Fujiwara M., Asymptotic expansions in the Heaviside's operational calculus, Proc. Imp. Acad. Jap. 15 (1939), 283-287.
80. Gaffey W. R., A real inversion formule for a class of bilateral Laplace Transforms, Pacific. Journ. Math. 7 (1957), 879-883.
81. Ganelius T., Un théorème taubérien pour la transformation de Laplace, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 242 (1956), 719-721.
82. Gardner M., Berns J., Les processus transitifs dans les systèmes linéaires, M.-L., Gostekhizdat, 1951.
83. Gilly J., Etude analytique des produits de composition, Comp. Ren. Acad. Sci. (Paris) 219 (1944) 383-385.
84. Gilly J., Les parties finies d'intégrales et la transformation de Laplace-Carson, Revue Sci., 83 (1945), 259-270.
85. Griffith J. L., On the Hankel J-, Y- and H-transforms, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 738-741.
86. Griffith J. L., On the asymptotic behaviour of Hankel transforms, Journ. Proc. Roy, Soc. New South Wales 88 (1954), 71-76 (1955).
87. Grinberg G., Quelques aspects de la théorie mathématique des phénomènes électriques et magnétiques, Izd. AN SSSR, 1948 (en russe).
88. Guelfand I., Chilov G., Fonctions généralisées et opérations sur elles, M., Fizmatguiz, 1958 (en russe).
89. Guelfond A., Calcul des différences finies, M.-L., Gostekhizdat, 1952, (en russe).
90. Guinand A. P., Matrices associated with fractional Hankel and Fourier Transformations, Proc. Glasgow Math. Assoc. 2 (1956). 185-192.
91. Hahn H., Über eine Verallgemeinerung der Fourierschen Integralformel, Acta Math. 49 (1926), 301-353.
92. Haller J., Laplacesche Integraltransformation und Integration partieller Differentialgleichungen vom parabolischen Typus, Zurich, 1953.
93. Hankel H., Bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen, Math. Ann. 8 (1875), 354-470.
94. Hankel H., Die Fourierschen Reichen und Integrale für Zylinderfunktionen, Math. Ann. 8 (1875), 471-494.
95. Harkevitch A., Phénomènes ondulatoires transitoires, M-L., Gostekhizdat, 1950 (en russe).
96. Heywood P., Integrability theorems for power series and Laplace transforms, Journ. London Math. Soc. 32 (1957), 22-27.
97. Hill E., On Laplace integrals, 8 Skand. Math. Kogr. Stockholm (1934), 216-227.
98. Hill E., and Tamarkin J. D., On the theory of Fourier transforms, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), 768-774.
99. Hill E., and Tamarkin J. D., On absolute integrability of Fourier transforms, Fund. Math. 25 (1935), 329-352.
100. Hirschmann I., Widder G, The convolution Transform, Princeton, 1955.

101. H o r n J., Laplacesche Integrale und Gammaquotienten in der Theorie der linearen Integralgleichungen, Math. Z. 8 (1920), 100-114.
102. H s u L. C., Note on generalized Jordan's condition for the Fourier and Mellin transforms, Acta Math. Sinica 3 (1953), 142-147.
103. H u m b e r t P. et C o l o m b o S., Le calcul symbolique et ses applications à la Physique mathématique, Gauthier-Villars, 1947.
104. I g n a t o v s k i V., Sur la transformation de Laplace DAN 2 (1935), 5-11 ; 2 (1936), 169-172 ; 4 (1936), 107-110 ; 14 (1957), 167-172, 475-478 ; 15 (1937), 67-70, 163-166, 231-234 ; 15 (1937), 169-172 ; 18 (1938), 511-514 (en russe).
105. I s a a c s G. L. Comparaison theorems for Laplace integrals, Journ. London Math, Soc. 31 (1956), 282-300.
106. J a c k s o n D., Fourier Series and Orthogonal Polynomials, Minnesota, 1941.
107. J a c o b, Sur l'application de la transformation de Laplace à la sommation de la série de Fourier et des polynômes interpolés, DAN 32 (1941), 390-394 (en russe).
108. J a e c k e l K., Integraltransformationen mit Differenzkern, bei denen Kern-, Objekt- und Bildfunktion zum gleichen Typus gehören, Z. Angew. Math. Mech. 37 (1957), 401-403.
109. J a e g e r J. C., Introduction to the Laplace transformation with engineering applications, L. Methuen, 1949.
110. J a i s w a l J. P., On Meijer transform, Comp. Math. 12 (1956), 284-297 ; Math. Z. 55 (1952), 385-398 ; Ann. Soc. Sci. Bruxelles, ser. 1, 66 (1952), 131-151.
111. J a n e t M.. Compléments divers sur la transformation de Laplace et les équations aux dérivées partielles, Paris, 1957.
112. J e f f r e y s H. and J e f f r e y s B. S., Methods of mathematical physics, 2-nd ed., Cambridge, University Press, 1950.
113. J u r k a t W. und P e y e r i m h o f f A., Über einen absoluten Fatou-Rieszschen Satz für Laplaceintegrale, Acad. Serbe. Publ. Inst. Math. 7 (1954), 61-68.
114. K a m k e E. Differentialgleichungen, Berlin, 1944.
115. K o n t o r o v i t c h L. Intégrales définies et séries de Fourier, L., 1940 (en russe).
116. K a u s h i k S. P., A theorem for the generalized Laplace transform, Proc. Nat. Acad. Sci. India, sect. A 21 ((1952), 209-212.
117. K i k u s h i H., Bessel Transforms, Bull. Electrot. Lab. 16 (1954), 111-120.
118. K o i z u m i S. and S u n o u c h i G., Generalized Fourier integrals, Tohoku Math. Journ. (2) 5 (1954), 243-260.
119. K ö n i g, Neue Begründung der Theorie der Distributionen von L. Schvartz, Math. Nachr. 9 (1953), 129-148.
120. K o n t o r o v i c h M., Calcul opérationnel et phénomènes non stationnaires dans les circuits électriques. Izd. 2, M. Gostekhizdat, 1953 (en russe).
121. K o n t o r o v i t c h M., L é b é d e v N., Sur une méthode de résolution de certains problèmes de la théorie de la diffraction et des problèmes qui s'y rattachent. JETF 8, vip. 10-11 (1938), 1192-1206 (en russe).
122. K o p p e H., Die Berechnung von Zustandssummen mittels Laplace-Transformationen, Ann. der Physik 6 (1951), 423-428.
123. K o r e v a a r J., Distributions defined from the point of view of applied mathematics, Indag. Math. 17 (1955), 368-378.
124. K o r e v a a r J., Distributions defined by fundamental sequences, Nederl. Akad. We'ensch. Proc. ser. A. 58-Indag. Math. 17 (1955), 494-503, 483-493.
125. K o u p t s o v N., Sur la convergence absolue et uniforme des intégrales de Fourier, Matem. sb. 42 (84) (1957), 461-478 (en russe).

126. K o u z n e t s o v P., Sur la représentation d'une intégrale étendue à un contour, PMM, n° 2 (1947) (en russe).
127. K r o u g K., Sur les processus transitoires dans les circuits électriques linéaires, Gosenergoïzdat, 1948 (en russe).
128. K u m a r J. M., On Meijer transform, Acta Math. 93 (1955), 121-168.
129. K v a l v a s s e r V., Sur l'état actuel du calcul opérationnel et ses applications, Sb. naoučno-isleg. rab. Kouïbychev. indoustr. inst. 2 (1941).
130. L a k s h m a n a R a o S. K. and B h a t n a g a r P. L., A note on the Gegenbauer transform, Journ. Indian Inst. Sci. Sect. A. 38 (1956), 249-255.
131. L a v o i n e J., Sur le passage de l'image de *g* (*t*) à celle de *g* (*it*) dans la transformation de Laplace, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 244 (1957), 991-993.
132. L a v r e n t i e v M., C h a b a t B., Méthodes de la théorie des fonctions à variable complexe, M.-L., Gostekhizdat, 1951 (en russe).
133. L é b é d e v N., Les fonctions spéciales et leurs applications, M., Gostekhizdat, 1953 (en russe).
134. L é b é d e v N., Certaines transformations intégrales de la physique mathématique, Thèse LGU, 1950 (en russe).
135. L é b é d e v N., Sur une formule d'inversion, DAN 52 (1946), 395-398 (en russe).
136. L é b é d e v N., Quelques équations intégrales singulières liées aux développements intégraux de physique mathématique, DAN 65 (1949), 621-624 (en russe).
137. L é b é d e v N., Sur le développement d'une fonction arbitraire en une intégrale suivant les fonctions de McDonald à indice complexe, DAN 58 (1947), 1007-1010.
138. L é b é d e v N., K o n t o r o v i t c h M., JETF 9, 6 (1939), 729 (en russe).
139. L e r c h M., Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel, Acta Math. 27 (1903).
140. L e t n i k o v A., Théorie de différentiation à indice arbitraire, M., 1868 (en russe).
141. L é v i n e B., Transformations du type Fourier-Laplace moyennant les solutions d'une équation différentielle du second ordre, DAN 106 (1956), 187-190.
142. L é v i n e V., Séries et intégrales de Fourier, éléments de calcul opérationnel, M., Sovietskoe radio, 1948 (en russe).
143. L é v i t a n B., Développement suivant les fonctions propres, M.-L., Gostekhizdat, 1950 (en russe).
144. L e v y P., Calcul Symbolique d'Heaviside, Bull. Sci. Math. 50 (1926), 174.
145. L i o n s J. L., Supports dans la transformation de Laplace, Journ. Analyse Math. 2 (1953), 369-380.
146. L o u r i e r A., Calcul opérationnel et ses applications aux problèmes de mécanique, M.-L., Gostekhizdat, 1950 (en russe).
147. L u b i t c h Y., Certains théorèmes taubériens pour les transformations généralisées de Fourier, DAN 113 (1957), 32-35 (en russe).
148. L y k o v A., Théorie de la chaleur, M.-L., Gostekhizdat, 1952 (en russe).
149. M a c e v A., On the inmersion of an algebraic ring into a filed, Math. Ann. 113 (1936), 686-691.
150. M a i n r a V. P., On certain operational images of infinite series, Bull. Calcutta Math. Soc. 50 (1958), 34-52.
151. M a i t r e J., Sur l'intégration généralisée, la Thèse, Montpellier, 1950.
152. M a l g r a n g e B., Sur quelques propriétés des équations de convolution, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 238 (1954), 2219-2221.

153. Malujinets G., Relation entre les formules d'inversion de l'intégrale de Sommerfeld et les formules de Kontorovitch-Lébédev, DAN 119 (1958), 49-51 (en russe).
154. Malujinets G., Formule d'inversion pour l'intégrale de Sommerfeld, DAN 118 (1958), 1099-1102.
155 Mandelbrojt S., Quelques théorèmes sur les transformées de Fourier, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 240 (1955), 1393-1394.
156. Mandelbrojt S., La transformée de Fourier et les fonctions holomorphes dans un demi-plan, Journ. Math. Pures Appl. (9) 35 (1956), 211-222
157. Mann P. A., Summation von Fourierschen Reihen mittels der Laplaceschen Transformation, Arch. Elektr. Übertragung 7 (1953), 390-392.
158. Mc-Coy N. H., Remarks on divisors of zero, Amer. Math. Monthly 49 (1942), 286-295.
159. Mc-Cully J. C., The operational Calculus of the Laguerre Transform, Ph. D. University of Michigan 1957.
160. McLachlan N. W. et Humbert P., Formulaire pour le Calcul symbolique, Mem. Sci. Math. (Paris) 100 (1947).
161. McLachlan N. W., Humbert P. et Poli, Supplément au formulaire pour le calcul symbolique, Mem. Sci. Math. (Paris) 113 (1950),
162. McLachlan N. W., Complex variable and operational calculus, Cambridge the University Press, New-York, 1946.
163. Meijer C. S., Über eine Erweitering der Laplace-Transformation, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 43 (1940), 599-608, 702-711.
164. Miguel da Silveira, General operational calculus in n variables, Port. Math. 15 (1956), 49; 16 (1957), 41.
165. Mikusinski J., Rachunck operatorow, Warszawa, 1953.
166. Mikusinski J. G., Le calcul opérationnel d'intervalle fini, Stud. Math. 15 (1956), 225-251.
167. Mikusinski J. G., Sur la méthode de généralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible, Fund. Math. 36 (1948), 235-239.
168. Mikusinski J., Sur les solutions linéairement indépendantes des équations différentielles à coefficients constants, Stud. Math. 16 (1957), 41-47.
169. Mikusinski J., L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle, Annales Univ. M. C. Sclodowska, sec. A, 2 (1947), Lublin; 3 (1949), Lublin-Polonia.
170. Milne-Thomson L. T., On the operational solution of the homogenoaurs linear equation of finite differences by generalized continued fractions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 51 (1931). 91-96.
171. Moïsseev N., Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants à l'aide de la transformation de Laplace, Troudy voenno-vozdouchny academii imeni Joukovskogo, vip. 102 (1944) (en russe).
172. Morse Ph., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, vols 1 and 2, McGraw-Hill, 1953.
173. Neufeld J., On the operational solution of linear mixed difference differential equations, Proc. Cambridge Philos. Soc. 30 (1934), 389-391.
174. Noble B., Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations, New-York, 1958.
175. Norain R., On a generalized Laplace transform. Math. Z. 69 (1958), 228-233.
176. Nordon J., Sur une méthode de calcul des images symboliques, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 227 (1948), 23-25.
177. Nowacki W., A dynamical problem of Thermoelasticity, Arch. Mech. Stosowanej (3) 9 (1957), Warszawa.
178. Oberhettinger F., Tabellen zur Fourier Transformation, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg. 1957.

179. U f l i a n d Y., Résolution d'un problème spatial de la théorie de l'élasticité posé pour un corps cunéiforme sous des déplacements donnés à la frontière, DAN 105 (1955), 1177-1179 (en russe).
180. U f l i a n d Y., Quelques problèmes de la théorie de l'élasticité solubles à l'aide des transformations intégrales, Thèse, Léningrad, polytekh. inst., 1957 (en russe).
181. P a i l l o u x H., Calcul symbolique et équations aux dérivées partielles, Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam (1954), 153.
182. P a l e y R. and W i e n e r N., Fourier transforms in the complex domain, New-York, 1934.
183. P a p o u l i s A., A new method of inversion of the Laplace transform, Quart. App. Math. 14 (1957), 405-414.
184. P a r k u s H., Periodisches Temperaturfeld im Keil, Österr. Ing. Arch. 10 (1956), 241-243.
185. P a r o d i M., Equations intégrales et transformation de Laplace, Paris, 1950.
186. P a r o d i M., Applications physiques de la transformation de Laplace, Paris, 1948.
187. P e r e s J., Calcul symbolique d'Heaviside et calcul de composition de Vito Volterra, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 217 (1943), 517-520.
188. P e r e s J., Quelques applications du calcul de composition de Volterra, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 217 (1943), 585-588.
189. P e t e r s e n R., Laplace transformation of almost periodic functions, Den 11 Skandinaviske Matemat. Kongr., Trondheim, 1949, Oslo (1952), 158-165.
190. P e t e r s e n R., On Lerch's theorem, Compt. Rend. Dixieme Congress Math. Scandinaves, 1946, Copenhagen (1947), 376-383.
191. P i n c h e r l e et A m a l d i, Operazioni distributive, Bologne, 1902.
192. P i n k h a m R. S., An inversion of the Laplace and Stieltjes transforms utilizing difference operators. Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 1-18.
193. P i p e s L., Operational representation of discontinuous functions, Journ. Franklin Inst. 225 (1938), 53-61.
194. P l e i j e l A., Beitrag zur Theorie der Laplace-Transformationen, Tolfte Skandinaviska Matematikerkongressen, Lund, 1953, (1954), 217-221.
195. P l e s s n e r A., Sur l'introduction du calcul opérationnel d'Heaviside dans la théorie spectrale des opérateurs maximaux, DAN 26, n° 1 (1940) (en russe).
196. P o l l a r d H. and S t a n d i s h C., Inversion of a class of discrete convolution transform, Scripta Math. 22 (1956), 207-216.
197. P r i v a l o v I., Introduction à la théorie des fonctions à variable complexe, M.-L., Gostekhizdat, 1948 (en russe).
198. R i a b t s e v I., Sur la structure des opérateurs de Mikusinski dans un espace pseudo-normé, Izv. vouzov (matematika) n° 1 (2), 1958, 143-151 (en russe).
199. R i a b t s e v I., Sur le retard variable, Izv. vouzov (matematika), n° 1 (8), (1959), 164-173 (en russe).
200. R i e k s t y n c h E., Quelques formules pour la transformation de Laplace, PMM 17 (1953), 761-768.
201. R i m s k i - K o r s a k o v B., Eléments de calcul opérationnel, M., 1958 (en russe).
202. R o m a n o v s k i P., Séries de Fourier. Théorie du champ. Fonctions analytiques et spéciales. Transformation de Laplace, M., Fizmatguiz, 1959 (en russe).
203. R o u m c h i n s k i L., Transformation de Laplace et fonctions positives, Oučen. zap. KhGU, 4, 21 (1949), 101-130 (en russe).
204. R y l l - N a r d z e w s k i G., Sur la convergence des séries d'opérateurs, Stud. Math. 13 (1953), 37-40, 41-47.

205. S a k s e n a K. M., Some theorems concerning a generalized Laplace transform, Collect. Math. 10 (1958), 3-19.
206. S a k u r a i T., A new operational method in mathematical physics, Tohoku Math. Journ. 44 (1937), 39-80.
207. S a k u r a i T., The application of operational methods to Volterra's integral equation, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. (3) 19 (1937), 1046-1072.
208. S a k u r a i T., The operators in the finite calculus, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. (3) 20 (1938), 190-220.
209. S a k u r a i T., An extension of Heaviside's operational method. Proc. Phys. Math. Soc. Jap. 18 (1936), 356; 19 (1937), 108 ; 20 (1938), 355.
210. S a k u r a i T., Fourier integral and some physical problems, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. (3) 18 (1936), 706-726.
211. S a l z e r H., Tables of Coefficients for the Numerical Calculus of Laplace-transform, Washington, 1953.
212. S a n J u a n R., Charakterisierung der durch einfach konvergente Laplace-Integrale darstellbaren Funktionen, Math. Nachr. 12 (1954), 113-118.
213. S a n J u a n R. and R o d r i g u e z - S a l i n a s B., Exposition of some known and other new theorems on ordinary and uniform convergence of the Fourier integral, Revista Acad. Ci. Madrid 47 (1953), 495-510.
214. S a r k a r G. K., On certain theorems on operational calculus and some properties of the generalized K-function of Bateman, Bull. Calcutta Math. Soc. 47 (1955), 81-86.
215. S c h m e i d l e r W., Integralgleichungen mit anwendungen in physik und technik, Leipzig, 1955.
216. S c h w a r t z L., Théorie des distributions, Paris, T. 1-2, 1950-1951.
217. S e x l Th., Zur systematischen Integration der Laplaceschen Differentialgleichung, Österr, Ing.-Archiv 10 (1956), 280-288.
218. S i n g h V., Convergence theorems for a generalized Laplace integral, Math. Z. 64 (1955), 1-9.
219. S m i r n o v V., Cours de mathématiques supérieures, M., Editions Mir, 1972-1975.
220. S m i t h J. J. and A l g e r P. L., A Derivation of Heaviside's Operational Calculus Based on Generalized Functions of Schwartz, Trans. AIEE 68, part 2 (1949), 939-944.
221. S n e d d o n I. N., Functional analysis, Berlin, 1955.
222. S n e d d o n I. N., Fourier Transforms, New-York, 1951.
223. S n e h l a t a, On generalized Laplace transform and self-reciprocal function, Proc. Nat. Acad. Sci. India. Sect. A 21 (1952), 190-200.
224. S o n i n e N., Recherches sur les fonctions cylindriques et les polynômes spéciaux, M., Gostekhizdat, 1954 (en russe).
225. S r i v a s t a v a K. J., Fractional integration and Meijer transform, Math. Z. 67 (1957), 404-412.
226. S t e i n b e r g J., Sur les lois de commutation de certaines transformations integrales. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 10 (1956), 25-33.
227. S t e n d e r P., Recueil d'exercices de calcul opérationnel, 1954 (en russe).
228. S z i l a v y F. G. und Z e r g e n y i E., Über ein Wärmeleitungsproblem, Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl. 3 (1954), 253-263 (1955).
229. T a d e n u m a R., Conduction of Heat in a circular Cylinder Varying in Length at a Constant Rate, Bull. Electrot. Lab. 16 (1952), 784-786.
230. T a d e n u m a R., Conduction of Heat in a Rod with Moving Boundary, Bull. Electrot. Lab. 16 (1952), 860-863.
231. T a m a r k i n I. D., On Laplace's integral equation, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), 417-425.
232. T a n n o Y., An inversion formula for convolution transforms, Kodai Math. Sem. Rep. 8 (1956), 79-84.
233. T h o m s o n W., Laplace Transformation, New-York, 1950.

234. T i l l m a n n, Analytische Fortsetzung in der Fantappiesehen Theorie der analytischen Funktionale, Archiv der Math. 8, 1, 43-45.
235. T i t c h m a r c h E. C., Complex Fourier-Bessel transforms, Quart. Journ. Math. Oxford 19 (1948), 164-175.
236. T i t c h m a r c h E. C.. The zeros of certain integral functions, Proc. London Math. Soc. 25 (1926), 283-302.
237. T i t c h m a r c h E. C., The theory of functions, Oxford, Clarendon press, 1932.
238. T i t c h m a r c h E. C., Introduction to the theory of Fourier's integrals, Oxford, Clarendon press, 1937.
239. T o l s t o v G., Séries de Fourier, M.- L., Gostekhizdat, 1951 (en russe).
240. T r a n t e r C. J., Integral transforms en mathematical physics London, Methuen, New-York, Wiley, 1951.
241. T r i c o m i F., Über Doetschs Umkehrformel der Gauβ-Transformation und eine neue Umkehrung der Laplace-Transformation, Math. Z. 40 (1936), 72-726.
242. T s i p k i n e Y., Processus transitoires et permanents dans les circuits impulsionnels, M.-L., Gostekhizdat, 1951 (en russe).
243. Y o u r i e v M., Régimes permanents dans les quadripôles, 1936 (en russe).
244. V a c h t c h e n k o - Z a k h a r t c h e n k o M., Calcul opérationnel et ses applications à l'intégration d'équations différentielles linéaires, Kiev, 1862 (en russe).
245. V a l l é e P o u s s i n, Cours d'analyse infinitésimale, Paris, 1909-1912.
246. V a n d e r P o l B., B r e m m e r H., Operational Calculus Based on the two Sised Laplace Integral, Cambridge, 1950.
247. V a n d e r W a e r d e n B. L. Moderne Algebra, Berlin, Spinger, 1930-1931.
248. V a r m a R. S., On a generalization of Laplace integral, Proc. Nat. Acad. Sci. India, sect. A, 20 (1951), 209-216.
249. V a s i l a c h e S., Sur la caractérisation de la transformation de Fourier des distributions, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 246 (1958), 2836-2838.
250. V a s i l a c h e S., Elemente de Teoria Multimilor si a Structurilor Algebrice, Edit. Acad. Rep. Popul. Romine (1956).
251. W a g n e r K. W., Operatorenrechnung und Laplacesche transformation, Leipzig, 1950.
252. W a s o w W., Discrete approximations to the Laplace transformation, Zeitschr. Angew. Math. Phys. 8, nº 5, 401-417.
253. W a t s o n G., A treatise on the Theory of Bessel Functions, 1945.
254. W i d d e r D. W., The Laplace Transform, Princeton, 1946.
255. W i d d e r D. V., The heat equation and the Weierstrass transform, Proc. Conference on differential equations, Univ. Maryland Book Store (1956), 227-234.
256. W i e n e r N., The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge University Press, 1933.
257. W i e n e r N., The operational calculs, Math. Ann. 95 (1926), 557-584.
258. W i e n e r N., Tauberian theorems, Ann. of Math. 33 (1932), 1-100.
259. W l o d a r s k i L., Sur une formule de Efros, Studia Math. 13 (1953), 183-187.
260. W l o d a r s k i L., Une remarque sur une classe de fonctions exponentielles du calcul opérationnel, Studia Math. 13 (1953), 188-189.
261. W o l i b n e r W., Sur certains corollaires du théorème de Titchmarsh, Studia Math. 14 (1953), 107-110; (1954).
262. W r i n c h D., Fourier transforms and structure crystalls, 1946.
263. W u y t s P., Region of convergens of an integral of the form

$\int_0^\infty e^{-s\lambda(t)}F(t)\,dt$ ($\lambda(t)$-complex), Meded. Kon. Vlaamse Acad. Kl. Wetensch. 18 (1956), 70.
264. W u y t s P., On the representation of an analytic function by a Laplace-integral, New Arch. Wisk. (3) 4 (1956), 71-80.
265. W u y t s P., On the zeros of a Laplace transform, Simon Stevien 31 (1956), 37-46.
266. W u y t s P., On the convergence-abscissa of a Laplace integral, New Arch. Wiskunde (3) 2 (1954), 1-27.
267. Y o s h i h i r o T., Some theorems of Fourier integral, Journ. Math. Tokyo 1 (1953), 87-93.
268. Y o u n g R. C., The asymptotic behaviour of $F(z)=\int_{a-0}^{b+0} e^{zt}\,dg(t)$, Math. Z. 40 (1935), 292-311.
269. Z a i d m a n S., La représentation des fonctions vectorielles par des intégrales de Laplace-Stieltjes, Ann. of Math. (2) 68 (1958), 260-277.
270. Z y g m u n d A., Trigonometric series, Cambridge University Press, 1959.

INDEX

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Ecrire à l'adresse: Ier Rijski péréoulok, 2, Moscou, I-278, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

OUVRAGES PARUS

LA PLANETE DES ÉNIGMES

par E. Novikov

De conception originale, l'ouvrage de E. Novikov, candidat au doctorat ès sciences géologiques et minéralogiques, familiarise le lecteur avec l'histoire de la connaissance scientifique de notre planète, dont il souligne les paradoxes et les énigmes.

Le lecteur apprendra des détails fort curieux sur les résultats inattendus de recherches récentes.

Cet ouvrage intéressera un large public, car l'auteur y soulève maints problèmes d'actualité auxquels nul ne peut rester indifférent.